2019 考研

高 等 数 学

重难点题型专项训练

主讲：唐五龙

目　录

第一讲　函数 极限 连续

重点题型一　求函数的极限

方法1. 利用有理运算（加一个减一个，乘一个除一个（特别是有理化））求极限

方法2. 无穷小量的等价代换以及性质

1.常用等价无穷小　　当$x\to 0$时,

$$x\sim \sin x\sim \tan x\sim \arcsin x\sim \arctan x\sim \ln(1+x)\sim e^{x}-1;$$

$$(1+x)^{\alpha}-1\sim \alpha x,\ \ 1-\cos x\sim \frac{1}{2}x^{2}$$

$x-\sin x\sim$

$x-\tan x\sim$

$x-\arcsin x\sim$

$x-\arctan x\sim$

（不用记，但是要熟练推出结果）

2．等价无穷小代换一般只用在因式，加减的地方不一定能用.

3. 无穷小量与有界函数的积仍为无穷小（特别用在出现$\sin\infty,\cos\infty$）

方法3.　洛必达法则（注意正确、合理使用）　　方法4.　两个重要极限

方法5　泰勒公式　　方法6　导数的定义　　方法7　极限存在的两个准则

方法8　定积分的定义　　方法9　利用收敛级数

（方法7-9　一般用在数列的极限）

例1　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{xe^{x^{2}}(\tan x-\sin x)}$.

例 2　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{x}{3}}-\sqrt[3]{1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}}}{x^3(\sqrt{1+\arcsin x}-1)}$

例 3 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

例 4 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\ln(1+x)-ax-bx^2}{kx^3}=1$ ，求 a,b,k .

重点题型二　求数列的极限

方法 1　转化成函数的极限

方法 2　利用夹逼准则求极限

例 5 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}$,其中 $a_i>0\quad(i=1,2,\cdots,m)$.

解　令 $\max\limits_{1\le i\le m} a_i = a$，则

$$a=\sqrt[n]{a^n}\le\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\le\sqrt[n]{ma^n}=\sqrt[n]{m}a$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=1$$

则　原式$=a=\max\limits_{1\le i\le m} a_i$

注：本题的结论是一个常用结论.

方法 3　利用单调有界准则求极限（先证明极限存在,再求出极限）

例 6 设 $x_1>0, x_{n+1}=\ln(1+x_n)\quad(n=1,2,\cdots)$，证明：数列 $\{x_n\}$ 极限存在并求此极限.

方法 4　利用定积分的定义求极限

例 7　求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\arctan\frac{1}{n}}{1+n^2}+\dfrac{\arctan\frac{2}{n}}{2^2+n^2}+\cdots+\dfrac{\arctan\frac{n}{n}}{n^2+n^2}\right)$.

例 8　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$;

方法 5　利用收敛级数求极限（数学一、数学三）

重点题型三　讨论连续性及间断点类型

例 9　求函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$ 的间断点并指出其类型.

例 10　求函数 $f(x)=\dfrac{|x|^{x}-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的间断点并指出其类型.

第二讲　导数与微分

重点题型一　导数定义的正确理解及其应用求极限

例 1　设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某领域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是（　　）

（A）$\lim\limits_{h\to+\infty} h\left[f(a+\frac{1}{h})-f(a)\right]$ 存在.

（B）$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在.

（C）$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在.

（D）$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在.

例 2　设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$（　　）.

（A）$-2f'(0)$　　（B）$-f'(0)$

（C）$f'(0)$　　（D）0

例 3　设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点（1，0）处有公共切线，则 $\lim\limits_{n\to\infty} nf(\frac{n}{n+2})=$______.

例4　设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$在$[a,b]$上可导，且

$$\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)' = f(x).$$

重点题型三　导数的计算

1. 复合函数求导：　略
2. 隐函数的导数：　略
3. 反函数的导数：　略
4. 参数方程求导法（数一、二）：略
5. 对数求导法：　略
6. 高阶导数：

常用方法：

1）代公式（直接或间接）；

2）求一阶 y'、二阶 y''， y''' 归纳 n 阶导数 $y^{(n)}$；

3）利用泰勒级数（求某一点的高阶导数）；

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

常用公式：

1）　$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$;

2）　$(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$;

3）　$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$.

7.变限积分的求导问题（重中之重，后面讲）.

例 5　已知 $y=f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)$, $f'(x)=\arctan x^2$,则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$________.

解　$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=f'\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)\left.\left(\frac{12}{(3x+2)^2}\right)\right|_{x=0}$

$$=f'(-1)\cdot 3=3\arctan 1=\frac{3}{4}\pi$$

例 6　设 $y=(1+x^2)^{\sin x}$,求 y'.

解　$y=e^{\sin x\ln(1+x^2)}$

$$y'=(1+x^2)^{\sin x}\left[\cos x\ln(1+x^2)+\frac{2x\sin x}{1+x^2}\right]$$

例 7　设 $y=\sqrt[3]{\frac{(x+1)(x+2)}{x(1+x^2)}}$，求 y'.

解　$\ln|y|=\frac{1}{3}[\ln|x+1|+\ln|x+2|-\ln|x|-\ln(1+x^2)]$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}-\frac{2x}{1+x^2}\right].$$

$$y'=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{(x+1)(x+2)}{x(1+x^2)}}\left[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}-\frac{2x}{1+x^2}\right]$$

例 8 设函数 $y=y(x)$ 由 $y-xe^y=1$ 所确定,试求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

解　由 $y-xe^y=1$ 知

$y'-e^y-xy'e^y=0$　　①

令 $x=0$，由原方程知此时 $y=1$.

将 $x=0$，$y=1$ 代入上式得 $y'(0)=e$.

① 式两端对 x 求导得.

$$y''-y'e^y-y'e^y-x(y'e^y)'=0$$

将 $x=0$， $y=1$， $y'(0)=e$ 代入上式得 $y''(0)=2e^2$

例 9 设函数 $y=y(x)$ 由 $e^{-y}+x(y-x)=1+x$ 所确定,试求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

例 10 设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^t}\,dt$，求 $(f^{-1})'(0)$.

例 11 求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(2019)}(0)$.

例 12 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x s\text{in}(x-t)^2dt=$___________.

例 13 $f(x)$ 连续，则 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=$ （ ）.

A $xf(x^2)$ B $-xf(x^2)$ C $2xf(x^2)$ D $-2xf(x^2)$

例 14 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x \sqrt{x-t}e^t dt}{\sqrt{x^3}}$.

第三讲 微分中值定理及其导数的应用

重点题型一 利用微分中值定理的等式证明

一、微分中值定理（3 个）及其推广（2 个：导数零点和介值定理的证明）.

二、 利用罗尔定理

（1）单纯证 $f^{(n)}(\xi)=0$，一般 $n=1,2$

例 1 设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，$(0,3)$ 上可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$， $f(3)=1$，求证存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$.

（2）只含一点 $\xi\in(a,b)$，且等式中所含抽象函数往往相差一阶（若相差两阶通过加一个减一个进行分组）

例 2 设 $f(x)$ 在$[0, \dfrac{\pi}{2}]$上连续,在$(0, \dfrac{\pi}{2})$内可导，且 $f(\dfrac{\pi}{2})=0$.

求证: $\exists \xi \in (0, \dfrac{\pi}{2})$，使 $f'(\xi)=-2\cot\xi f(\xi)$.

例 3 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,在（0,1）内可导,且 $f(0)=f(1)=0,\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$.

试证 1） 存在$\eta \in \left(\dfrac{1}{2},1\right)$,使 $f(\eta)=\eta$.

2） 对任意实数λ，存在$\xi \in (0,\eta)$,使 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

三. 利用拉格朗日中值定理和柯西中值定理

证明存在两个点$\xi,\eta \in (a,b)$.

例 4 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且 $f(0)=0,\ f(1)=1$.

证明：1） 存在$\xi \in (0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$.

2） 存在两个不同的点$\eta,\zeta \in (0,1)$,使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

重点题型二　单调区间、凹凸区间、极值与拐点问题

例 5　已知 $y=y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定，求 $y(x)$ 的极值.

例 6　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其中导数 $f'(x)$ 的图形如图所示（现场手写），则函数 $y=f(x)$ 的极值与拐点的个数为（　　）

重点题型三　求渐近线

例 7　曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的渐近线的条数为__________.

重点题型四　方程的根

1.存在性：

方法 1：零点定理；

2.根的个数：

方法 1：单调性；

方法 2：罗尔定理推论；

罗尔定理推论：若在区间 I 上 $f^{(n)}(x)\neq 0$，则方程 $f(x)=0$ 在 I 上最多 n 个实根.

方法 3：罗尔定理　证函数至少有 n 个根，不妨证函数的原函数至少有 $n+1$ 个根.

例 8 已知函数 $f(x)=\int_x^1\sqrt{1+t^2}dt+\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}dt$，求 $f(x)$ 零点的个数.

例 9 求方程 $k\arctan x-x=0$ 不同实根的个数，其中 k 为参数.

重点题型五　不等式证明

证明不等式常用的四种方法：

1）单调性+最大最小值；　　2）拉格朗日中值定理；

3） 凹凸性；　　4）泰勒公式（了解，略）.

例 10 证明 $x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\dfrac{x^2}{2}\quad(-1<x<1)$.

例 11　设 $e<a<b<e^2$，证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$.

例 12　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单增，证明：

$$(a+b)\int_a^b f(x)dx<2\int_a^b xf(x)dx$$

第四讲　不定积分

2．基本积分公式

(1) $\int kdx = kx + C$ （k 是常数），

(2) $\int x^{\mu}dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C\left(\mu \neq -1\right)$,

(3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$,

(4) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$,

(5) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$,

(6) $\int \cos xdx = \sin x + C$,

(7) $\int \sin xdx = -\cos x + C$,

(8) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 xdx = \tan x + C$,

(9) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 xdx = -\cot x + C$,

(10) $\int \sec x \tan xdx = \sec x + C$,

(11) $\int \csc x \cot xdx = -\csc x + C$

(12) $\int e^x dx = e^x + C$,

(13) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

（以下为补充的几个需要大家务必熟记的积分公式）：

（14）　$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$

（15）　$\int \sec x\,\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C.$

（16）　$\int \csc x\,\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C.$

重点题型　不定积分的计算

例 1　$\int \dfrac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

例 2 （1） $\int \frac{2x+1}{x^2-2x-3}\mathrm{d}x$

（2） $\int \frac{2x+1}{x^2-2x+1}\mathrm{d}x$

（3） $\int \frac{2x+1}{x^2-2x+3}\mathrm{d}x$

例 3 $\int \ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})\mathrm{d}x$

例 4 $\int \frac{1}{2\sin^2 x+\cos^2 x}dx$

第五讲　定积分及其应用

重点题型一　定积分的计算

例 1　$I=\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+\sin x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$

例 2　$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^4 xdx$

例 3　$I=\int_{0}^{\pi}\sin^5 xdx$

例 4　$\int_{0}^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}f(\sin x)dx$，并计算$\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

例 5　已知$f(x)=\int_{0}^{x}\frac{\sin t}{\pi-t}dt$，计算$\int_{0}^{\pi}f(x)dx$.

重点题型二　反常积分的计算

例 6 判断下列反常积分的敛散性

（1） $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$　　（2） $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$

重点题型三　定积分的应用

例 7 求 $l_1 : r = \frac{\sqrt{2}}{2} a$ 外，$l_2 : r^2 = a^2 \cos 2\theta$ 内与 x 轴在第一象限所围成的面积.

例 8　求圆域 $x^2 + (y - b)^2 \le a^2\ (b > a > 0)$ 绕 x 轴旋转一周的体积.

例 9（数一、二） 设星形线$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ 求:

1）它所用的面积;

2）它的周长;

3）它绕x轴旋转而成旋转体的体积和表面积（数一、二）.

解：1）面积:

$$A = 4\int_0^a y\,\mathrm{d}x = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\sin^3 t(-3a\sin t\cdot\cos^2 t)\,\mathrm{d}t$$

$$= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2(\sin^4 t - \sin^6 t)\,\mathrm{d}t = \frac{3\pi a^2}{8}$$

2）弧长： $L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sin t\cdot\cos t\,\mathrm{d}t = 6a$

3）体积： $V_x = 2\int_0^a \pi y^2\,\mathrm{d}x = 6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t(1-\sin^2 t)\,\mathrm{d}t = \frac{32}{105}\pi a^3$

旋转体表面积

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi y\sqrt{x'^2 + y'^2}\,\mathrm{d}t = 12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{12}{5}\pi a^2$$

第六讲 多元函数微分学

1. 二元函数的定义

设 D 是 R^2 的一个非空子集,称映射 $f:D\to R$ 为定义在 D 上的二元函数,通常记为 $z=f(x,y),\ (x,y)\in D$ 或 $z=f(P),P\in D$.其中点集 D 称为该函数的定义域,x,y 称为自变量,z 称为因变量.

2．重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$ $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 是以“任意方式”

注意证明重极限不存在常用方法:

沿两种不同路径极限不同（通常可取过点 (x_0,y_0) 的直线）

3.连续 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$

4.偏导数

1）定义: $f_x'(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\dfrac{d}{dx}f(x,y_0)\Big|_{x=x_0}$

$$f_y'(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\frac{d}{dy}f(x_0,y)\Big|_{y=y_0}$$

5.全微分

1） 定义:若 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$

2） 判定:

（1） 必要条件: a） $f_x'(x_0,y_0)$ 与 $f_y'(x_0,y_0)$ 都存在; b）在 (x_0,y_0) 处连续.

（2） 充分条件: $f_x{}'(x,y)$ 和 $f_y'(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续.

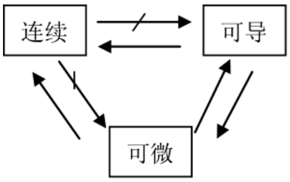
（3） 用定义判定:

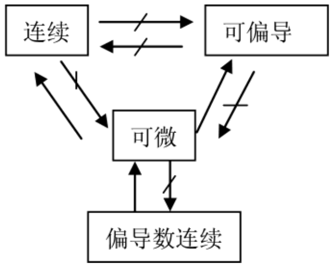
a） $f_x'(x_0,y_0)$ 与 $f_y'(x_0,y_0)$ 是否都存在?

b） $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta z-[f_x'(x_0,y_0)\Delta x+f_y'(x_{0,}y_0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ 是否为零?

3） 计算：若 $f(x,y)$ 可微,则 $dz=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy$.

6.连续、可导、可微的关系





一元函数　　　　　　　　　　　　多元函数

另外：连续可以推出极限存在，极限存在可以推出局部有界

两个二阶混合偏导存在且连续，推出两者相等

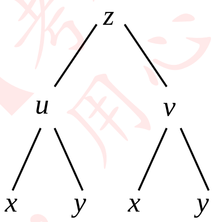
7.偏导数与全微分的计算

1）复合函数求导法

设 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 可导, $z=f(u,v)$ 在相应点有连续一阶偏导数,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$



2）隐函数求导法

（1） 由一个方程所确定的隐函数

设 $F(x,y,z)$ 有连续一阶偏导数, $F_z'\neq 0, z=z(x,y)$ 由 $F(x,y,z)=0$ 所确定.

方法:

公式法、等式两边同时求偏导法、利用微分形式不变性

8.极值与最值

1）无条件极值.

（1）定义: 极大： $f(x_0,y_0)\ge f(x,y);$ 极小： $f(x_0,y_0)\ge f(x,y);$

（2）极值的必要条件 $f_x'(x_0,y_0)=0,\ f_y'(x_0,y_0)=0$；

极值点 驻点

（3）极值的充分条件

设 $f_x{}'(x_0,y_0)=0,$ 且 $f_y'(x_0,y_0)=0$（注意偏导不存在的点用定义）.

（1）当 $AC-B^2>0$ 时,有极值 $\begin{cases} A>0 & \text{极小值;} \\ A<0 & \text{极大值.} \end{cases}$

（2）当 $AC-B^2<0$ 时,无极值.

（3）当 $AC-B^2=0$ 时,失效（一般用定义判定）.

2）条件极值（往往是求条件最值）

方法一：条件可直接解出代入目标函数化成一元函数

方法二：条件可写成参数方程带入目标函数转化成一元函数

方法三：拉格朗日乘数法

（1） 函数 $f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)$=0 条件下的极值.

令 $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\phi(x,y)$

（2） 函数 $f(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z)=0,\psi(x,y,z)=0$ 条件下的条件极值.

令 $L(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\phi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$.

3）最大最小值

求连续函数 $f(x,y)$ 在有界闭域 D 上的最大最小值三部曲.

（1） 求 $f(x,y)$ 在 D 内部可能的极值点.

（2） 求 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的可能极值点（条件极值）.

（3） PK 所有的函数值.

重点题型一 多元函数偏导数与全微分的计算

例 1 设 (r,θ) 为极坐标, $u=u(r,\theta)$ 具有二阶连续偏导数, 并满足 $\frac{\partial u}{\partial \theta}\equiv 0$, 将 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 变换成 $u=u(r)$ 的导数。

解 由 $\frac{\partial u}{\partial \theta}=0$ 知，u 仅为 r 的函数，令 $u=\varphi(r)$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(r)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\varphi'(r)\frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(r)\frac{x^2}{r^2}+\varphi'(r)\frac{r-\frac{x^2}{r}}{r^2}=\varphi''(r)\frac{x^2}{r^2}+\varphi'(r)\left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right).$$

由对称性知 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varphi''(r)\frac{y^2}{r^2}+\varphi'(r)\left(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}\right)$.

则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varphi''(r)+\varphi'(r)\frac{1}{r}$.

例 2 设 $z=f(xy,yg(x))$,其中 f 有二阶连续偏导数， g 可导且在 $x=1$ 处取极值 $g(1)=1$,求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$.

例 3　若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{z}+xyz+x+\cos x=2$ 确定，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$______.

重点题型二　多元函数极值与最值

例 4　求函数 $z=x^{2}(2+y^{2})+y\ln y$ 的极值.

例 5　求曲线 $x^{3}-xy+y^{3}=1\,(x\geq 0,y\geq 0)$ 上的点到原点的最长距离和最短距离.

例 6　一根 2 米长的铁丝，切成三段，一段折成正方形，一段折成圆形，一段折成正三角形。求这三个图形所围成面积之和的最小值。

例 7（练习）求函数 $z = x^2 y(4-x-y)$ 在直线 $x+y=6$, x 轴和 y 轴所围成的区域 D 上的最大值和最小值.

解　$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy(4-x-y) - x^2 y = xy(8-3x-2y)$，

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2(4-x-y) - x^2 y = x^2(4-x-2y)$.

即 $\begin{cases} 3x+2y=8, \\ x+2y=4, \end{cases}$ 由此可解得 $z(x,y)$ 在 D 内唯一驻点 $(2,1)$，且 $z(2,1)=4$.

在 D 的边界 $y=0$，$0 \le x \le 6$ 或 $x=0$，$0 \le y \le 6$ 上，$z(x,y)=0$.

在边界 $x+y=6(0 \le x \le 6)$ 上，$z(x,y) = 2(x^3-6x^2)(0 \le x \le 6)$.

令 $\varphi(x) = 2(x^3-6x^2)$，$0 \le x \le 6$，则 $\varphi'(x) = 6x^2 - 24x$. 令 $\varphi'(x)=0$ 得 $x=4$. 计算 $\varphi(0)=0, \varphi(4)=-64. \varphi(6)=0$. 则 $z(x,y)$ 在边界 $x+y=6(0 \le x \le 6)$ 上的最大值为 0，最小值为 -64. 综上 $z(x,y)$ 在区域 D 上最大值为 4，最小值为 -64.

第七讲 多元函数的积分学

重点题型一 累次积分交换次序及与坐标系的转化

例 1 计算 $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 (\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2})\mathrm{d}x$

例 2 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$，则 $F'(2)$ 等于（ ）

A）$2f(2)$　　B）$f(2)$　　C）$-f(2)$　　D）0

例 3 计算 $\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}drd\theta$,其中 $D=\left\{(r,\theta)\middle|0\le r\le\sec\theta,0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$

重点题型二 计算二重积分

【总结】二重积分的计算步骤：

第一步：画出 D 的草图

第二步：观察 D 看能否简化计算（对称奇偶性、轮换性、形心公式）

第三步：选定坐标系

第四步：选定积分次序

第五步：计算

注意：第三步之前还需要考虑被积函数是否为分段函数（特别隐含的分段函数），先用积分性质：对区域的可加性分块积分.

例4　设区域 $D\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\}$, $f(x)$ 为 D 上正值连续函数, a,b 为常数,则 $\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma=(\qquad)$.

A） $ab\pi$，　　B） $\frac{ab}{2}\pi$，　　C） $(a+b)\pi$，　　D） $\frac{a+b}{2}\pi$.

例5 计算 $\iint\limits_D \left|x^2+y^2-1\right|\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\right\}$.

例6 计算 $\iint\limits_D \frac{x^2y+\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}}\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})dxdy$，其中

$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1, x\ge 0\right\}$.

第八讲　常微分方程

1．一阶方程

1）可分离变量 $y' = f(x)g(y)$

2）齐次　$y' = f(\frac{y}{x})$，令 $\frac{y}{x} = u$.

3）线性　$y' + P(x)y = Q(x)$

通解：　$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right]$

2．可降阶方程:（数一、二）

1）　$y'' = f(x)$

2）　$y'' = f(x, y')$　令 $y' = P, y'' = \frac{dP}{dx}$

3）　$y'' = f(y, y')$　令 $y' = P, y'' = P\frac{dP}{dy}$

3．高阶线性方程:

1）　变系数: $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$　非齐次

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$　齐次

解的结构:

a）齐次通解 $= c_1y_1 + c_2y_2$,其中 y_1, y_2 为齐次两线性无关特解

b）非齐次通解 = 齐次通解 + 非齐次特解

c）非齐次特解 I — 非齐次特解 II = 齐次特解

d）叠加原理

2）常系数:

a）齐次 $y''+py'+qy=0$

特征方程 $r^2+pr+q=0$

设r_1,r_2是特征方程两个根

1）不等实根：$r_1\neq r_2$， $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$；

2）相等实根：$r_1=r_2=\rho$， $y=e^{rx}(C_1+C_2x)$；

3）共轭复根：$r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$， $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$；

（推导需要欧拉公式，大家记住就好，另外欧拉公式可以推和差化积（积化和差）公式）

b） 非齐次：

$y''+py'+qy=f(x)$

1° $f(x)=P_n(x)e^{ux}$

令 $y^*=x^kQ_n(x)e^{ux}$ k等于u作为特征方程根的重数.

2° $f(x)=e^{\alpha x}\left[P_l(x)\cos\beta x+P_m(x)\sin\beta x\right]$

令 $y^*=x^ke^{\alpha x}\left[Q_n(x)\cos\beta x+W_n(x)\sin\beta x\right]$. $n=\max\{l,m\}$

3° 上面两种情形的组合：利用叠加原理.

重点题型一 常微分方程求解

例 1 求 $ydx+(x-3y^2)dy=0$ 的通解

例 2　方程 $y''+y=x^2+1+\sin x$ 的特解形式可设为

A）　$ax^2+bx+c+A\sin x$　　B）$ax^2+bx+c+B\cos x$

C）　$ax^2+bx+c+A\sin x+B\cos x$　　D）$ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$

重点题型二　综合题

例 3　设 $f(x)$ 连续,且满足 $\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x (x-t)f(t)dt+e^{-x}-1$,求 $f(x)$.

例 4　设 f 二阶连续可导，$z=f(e^x\cos y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$, 若 $f(0)=0, f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

重点题型三　应用题

例 5　设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零，若对任意的 $x_0 \in I$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $x = x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4，且 $f(0)=2$，求 $f(x)$ 的表达式.

例 6 （数一、二） 已知高温物体置于低温介质中，任一时刻该物体温度对时间的变化率与该时刻物体和介质的温差成正比，现将一初始温度为 $120°C$ 的物体在 $20°C$ 的恒温介质中冷却，30min 后该物体降至 $30°C$，若要将该物体的温度继续降至 $21°C$，还需冷却多长时间？

解　设 t 时刻物体温度为 $x(t)$，比例常数为 $k(>0)$，介质温度为 m，则

$\dfrac{dx}{dt} = -k(x-m)$，从而 $x(t) = Ce^{-kt} + m$，

$x(0)=120, m=20$，所以 $C=100$，即 $x(t)=100e^{-kt}+20$

又 $x(\frac{1}{2})=30,$ 所以 $k=2\ln 10$，所以 $x(t)=\dfrac{1}{100^{t-1}}+20$

当 $x=21$ 时，$t=1$，所以还需要冷却 3 0 min.