2020 考研数学全程班阶段测试
(数学二)

一、选择题：1 ～ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.

1. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos\sqrt{ax}-1}{x}, & x>0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}+b, & x<0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则

A. $a=-2,b=1$.　　B. $a=-\dfrac{1}{2},b=0$.

C. $a=-2,b=0$.　　D. $a=-\dfrac{1}{2},b=1$.

2. 下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是

A. $f(x)=x\mid x\mid$.　　B. $f(x)=\int_0^x \mid t\mid \mathrm{d}t$.

C. $f(x)=\mid x-\sin x\mid$.　　D. $f(x)=\sin\mid x\mid+\cos\mid x\mid$.

3. 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\mathrm{d}x,J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(\sin x)\mathrm{d}x,K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(\tan x)\mathrm{d}x$，则 I,J,K 的大小关系为

A. $J<I<K$.　　B. $I<J<K$.　　C. $I<K<J$.　　D. $K<J<I$

4. 函数 $f(x,y)=\sqrt{\mid xy\mid}$ 在 $(0,0)$ 点处

A. 不连续.　　B. 偏导数不存在.

C. 偏导数存在但不可微.　　D. 偏导数存在且可微.

5. 函数 $f(x)=\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{\mid x\mid}\right)\tan x}{(x-1)\arctan\dfrac{1}{x}}$ 在 $[-2,2]$ 上的第一类间断点是 $x=$

A. 1.　　B. 0.　　C. $-\dfrac{\pi}{2}$.　　D. $\dfrac{\pi}{2}$.

6. 累次积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$ 等于

A. $\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.　　B. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{2y-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

C. $\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^2 f(x,y)\mathrm{d}y$.　　D. $\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{1+\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

7. 设两个非零矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则必有

A. $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关.　　B. $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关.

C. $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.　　D. $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.

8. 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,2,3,则 $\boldsymbol{A}^* - \boldsymbol{E}$ 必相似于对角矩阵

A. $\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$. B. $\begin{bmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & 5 \end{bmatrix}$. C. $\begin{bmatrix} -5 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$. D. $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 5 \end{bmatrix}$.

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中的横线上.

9. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x^2)^{\frac{1}{x(\sin x-\tan x)}} =$ ________.

10. 设 $f(x) = \int_{-1}^{x}(1-|t|)\mathrm{d}t\,(x \geqslant -1)$,则曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴所围图形的面积为________.

11. 已知方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x}$,则方程 $y'' + ay' + by = \mathrm{e}^x$ 满足初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = \dfrac{3}{2}$ 的特解为________.

12. 曲线 $\int_0^{x+y}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = 2y + x^3$ 在(0,0)点处的法线方程为________.

13. 已知 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \mathrm{e}^{x^2}$,则 $f''(0) =$ ________.

14. 若矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,则 $|2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| =$ ________.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\ln(1+x^2)}\right]$.

16.(本题满分 10 分)

证明:$x\ln\dfrac{1+x}{1-x} + \cos x \geqslant 1 + \dfrac{x^2}{2}\,(-1 < x < 1)$.

17.(本题满分 10 分)

设 D 是位于曲线 $y = \sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}}\,(a > 1, 0 \leqslant x < +\infty)$ 下方,x 轴上方的无界区域.

(Ⅰ)求区域 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积;

(Ⅱ)当 a 为何值时,$V(a)$ 最小?并求此最小值.

18.(本题满分 10 分)

设 $z = x^3 f\left(xy, \dfrac{y}{x}\right)$,$f$ 具有连续二阶偏导数,求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

19.（本题满分 10 分）

计算二重积分$\iint\limits_D (x+y+\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域 D 由不等式 $x^2+y^2 \leqslant 2x$ 所确定.

20.（本题满分 11 分）

设 $f(x)$ 可导，且满足 $x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t$，求 $f(x)$.

21.（本题满分 11 分）

已知 $f(x)$ 在$[0,3]$上连续，在$(0,3)$内二阶可导，且 $f(0)+f(1)=2f(2)=2\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$.

证明：(1) 存在 $\xi \in [0,1]$，使 $f(\xi)=\dfrac{f(0)+f(1)}{2}$；

(2) 存在 $\eta \in (0,3)$，使 $f''(\eta)=0$.

22.（本题满分 11 分）

a,b 取何值时，线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -a & -1 \\ 1 & 4 & -4 & a-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ b+3 \end{bmatrix}$$

有唯一解、无解、有无穷多解？并在有无穷多解时，求出该方程组的通解.

23.（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_1x_3-x_2x_3)$，

(1) 写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$；

(2) 求一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 成对角矩阵；

(3) 写出 f 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 下化成的标准形.

2020 考研数学全程班阶段测试
(数学二) 参考答案

一、选择题

1. C　2. D　3. A　4. C　5. B　6. D　7. A　8. D

二、填空题

9. e　10. $1+\frac{2}{3}\sqrt{2}$　11. $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}+xe^x)$　12. $y=-x$　13. 2　14. 72

三、解答题

15.【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)-\sin^2 x}{\sin^2 x\cdot\ln(1+x^2)}$　(1 分)

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)-\sin^2 x}{x^4}$　(3 分)

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)-x^2}{x^4}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^4}$　(5 分)

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^4}{x^4}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+\sin x)(x-\sin x)}{x^4}$　(7 分)

$=-\dfrac{1}{2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2x)\left(\frac{1}{6}x^3\right)}{x^4}$　(9 分)

$=-\dfrac{1}{6}$　(10 分)

16.【证】 令 $f(x)=x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x-\dfrac{x^2}{2}-1\quad(-1<x<1)$　(1 分)

显然 $f(x)$ 是偶函数，所以是要证 $f(x)\geqslant 0\quad(0\leqslant x<1)$.　(3 分)

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x \quad (6 分)$$

$$\geqslant 2x-\sin x-x=x-\sin x\geqslant 0 \quad (9 分)$$

则 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 上单调增，又 $f(0)=0$，则 $f(x)\geqslant 0(0\leqslant x<1)$.　(10 分)

17.【解】 (Ⅰ) 所求旋转体的体积为

$$V(a)=\pi\int_0^{+\infty}xa^{-\frac{x}{a}}\,dx=-\frac{a}{\ln a}\pi\int_0^{+\infty}x\,da^{-\frac{x}{a}} \quad (2 分)$$

$$=-\frac{a}{\ln a}\pi\left[xa^{-\frac{x}{a}}\right]\Big|_0^{+\infty}+\frac{a}{\ln a}\pi\int_0^{+\infty}a^{-\frac{x}{a}}\,dx=\pi\left(\frac{a}{\ln a}\right)^2. \quad (5 分)$$

(Ⅱ) $V'(a)=2\pi\dfrac{a(\ln a-1)}{\ln^3 a}$,

令 $V'(a)=0$，得 $\ln a=1$，从而 $a=e$.　(7 分)

当 $1<a<e$ 时，$V'(a)<0$，$V(a)$ 单调减少；

当 $a > \mathrm{e}$ 时，$V'(a) > 0$，$V(a)$ 单调增加.

所以 $a = \mathrm{e}$ 时，V 最小. 最小体积为 $V(\mathrm{e}) = \pi\left(\dfrac{\mathrm{e}}{\ln \mathrm{e}}\right)^2 = \pi\mathrm{e}^2$. （10 分）

18.【解】 $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^4 f_1' + x^2 f_2'$， （2 分）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^4\left[xf_{11}'' + \frac{1}{x}f_{12}''\right] + x^2\left[xf_{21}'' + \frac{1}{x}f_{22}''\right] \quad（5 分）$$

$$= x^5 f_{11}'' + 2x^3 f_{12}'' + xf_{22}''， \quad（6 分）$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4x^3 f_1' + x^4\left[yf_{11}'' - \frac{y}{x^2}f_{12}''\right] + 2xf_2' + x^2\left[yf_{21}'' - \frac{y}{x^2}f_{22}''\right] \quad（9 分）$$

$$= 4x^3 f_1' + 2xf_2' + x^4 yf_{11}'' - yf_{22}''. \quad（10 分）$$

19.【解】 积分域 D，$x^2 + y^2 \leqslant 2x$ 关于 x 轴对称，则

$$\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}x = 0 \quad（2 分）$$

积分域 D，$x^2 + y^2 \leqslant 2x$ 关于 $x = 1$ 轴对称，则

$$\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}x = \iint_D [(x-1)+1]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi \quad（4 分）$$

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\,\mathrm{d}\rho \quad（7 分）$$

$$= \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta \quad（8 分）$$

$$= \frac{32}{9} \quad（9 分）$$

$$\iint_D (x + y + \sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}x = \pi + \frac{32}{9} \quad（10 分）$$

20.【解】 在积分 $\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t$ 中，令 $t - x = u$，则有

$$x = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^{-x} uf(u)\mathrm{d}u - x\int_0^{-x} f(u)\mathrm{d}u \quad（2 分）$$

等式两端对 x 求导，整理得

$$f(x) = 1 + \int_0^{-x} f(u)\mathrm{d}u \quad（4 分）$$

两端再对 x 求导得

$$f'(x) = -f(-x) \quad (1) \quad（5 分）$$

上式两端对 x 求导得

$$f''(x) = f'(-x) \quad (2) \quad（6 分）$$

又由(1)式得 $f'(-x) = -f(x)$，代入(2)式得

$$f''(x) + f(x) = 0 \quad（9 分）$$

解之得 $f(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$ （10 分）

注意到 $f(0) = 1, f'(0) = -1$ 得 $f(x) = \cos x - \sin x$. （11 分）

21.【证】 (1) 由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则在该区间存在最小值 m 和最大值 M，又

$$m \leqslant \frac{m+m}{2} \leqslant \frac{f(0)+f(1)}{2} \leqslant \frac{M+M}{2} = M \quad（2 分）$$

由连续函数介值定理可知，存在 $\xi \in [0,1]$，使

$$f(\xi)=\frac{f(0)+f(1)}{2} \qquad (4\text{ 分})$$

(2) 由积分中值定理得，存在 $c\in(2,3)$，使得

$$\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x=f(c)$$

则

$$f(\xi)=f(2)=f(c) \qquad (7\text{ 分})$$

由罗尔定理可知，存在 $\xi_1\in(\xi,2),\xi_2\in(2,c)$ 使得

$$f'(\xi_1)=0,f'(\xi_2)=0 \qquad (9\text{ 分})$$

再由罗尔定理可知，存在 $\eta\in(\xi_1,\xi_2)$ 使得

$$f''(\eta)=0. \qquad (11\text{ 分})$$

22.【解】 增广矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&0&2&0\\0&1&-2&-1&1\\0&0&2-a&0&0\\0&0&0&a-2&b+1\end{bmatrix}$. (3 分)

(1) 当 $a\neq2$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=4$，方程组有唯一解. (6 分)

(2) 当 $a=2$，且 $b\neq-1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=2,r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，方程组无解. (8 分)

(3) 当 $a=2$ 且 $b=-1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$ 该方程组有无穷多解，其通解为

$\boldsymbol{x}=(-2,1,0,0)^{\mathrm{T}}+c_1(-4,2,1,0)^{\mathrm{T}}+c_2(-4,1,0,1)^{\mathrm{T}}$. (11 分)

23.【解】 (1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&2&2\\2&4&-2\\2&-2&4\end{bmatrix}$; (2 分)

(2) 特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=6,\lambda_3=0$. (4 分)

当 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 时特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$,

当 $\lambda_3=0$ 时，$\boldsymbol{\xi}_3=\frac{1}{\sqrt3}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$.

取 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)$ 为正交矩阵，可使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\mathrm{diag}(6,6,0)$; (10 分)

(3) $f=6y_1^2+6y_2^2$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下化成的标准形. (11 分)