2020 考研数学全程班阶段测试
(数学一)

一、选择题:1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.

1. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos\sqrt{ax}-1}{x}, & x>0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}+b, & x<0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则

A. $a=-2,b=1$.　　B. $a=-\dfrac{1}{2},b=0$.

C. $a=-2,b=0$.　　D. $a=-\dfrac{1}{2},b=1$.

2. 下列函数中,在 $x=0$ 处不可导的是

A. $f(x)=x|x|$.　　B. $f(x)=\int_0^x|t|\,dt$.

C. $f(x)=|x-\sin x|$.　　D. $f(x)=\sin|x|+\cos|x|$.

3. 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx$, $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(\sin x)\,dx$, $K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(\tan x)\,dx$,则 I,J,K 的大小关系为

A. $J<I<K$.　　B. $I<J<K$.　　C. $I<K<J$.　　D. $K<J<I$

4. 函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在 $(0,0)$ 点处

A. 不连续.　　B. 偏导数不存在.

C. 偏导数存在但不可微.　　D. 偏导数存在且可微.

5. 设两个非零矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$,满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则必有

A. $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关.　　B. $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关.

C. $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.　　D. $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.

6. 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,2,3,则 $\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{E}$ 必相似于对角矩阵

A. $\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}$.　　B. $\begin{bmatrix}-1&&\\&-2&\\&&5\end{bmatrix}$.　　C. $\begin{bmatrix}-5&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}$.　　D. $\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&5\end{bmatrix}$.

7. 设 A,B 为两个随机事件,且有 $P(\overline{A})=0.4$, $P(B)=0.4$, $P(\overline{B}\mid A)=0.5$,则 $P(\overline{B}\mid(A\cup B))=$

A. $\dfrac{1}{7}$.　　B. $\dfrac{2}{7}$.　　C. $\dfrac{3}{7}$.　　D. $\dfrac{4}{7}$.

8. 设随机变量 (X,Y) 服从分布为 $N(1,2;3,4;0)$,则在 $Y=y$ 条件下,X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$ 为

A. $\dfrac{1}{\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{6}},-\infty<x<+\infty$.　　B. $\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{8}},-\infty<x<+\infty$.

C. $\dfrac{1}{\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{(y-1)^2}{6}},-\infty<y<+\infty$.　　D. $\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-2)^2}{8}},-\infty<y<+\infty$.

二、填空题：9 ～ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分，把答案填在题中的横线上.

9. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x^2)^{\frac{1}{x(\sin x-\tan x)}} =$ ________.

10. 设 $f(x)=\int_{-1}^{x}(1-|t|)\mathrm{d}t(x\geqslant -1)$，则曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围图形的面积为________.

11. 已知方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-x}$，则方程 $y''+ay'+by=\mathrm{e}^{x}$ 满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=\dfrac{3}{2}$ 的特解为________.

12. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x-4}$ 在 $x=1$ 处的幂级数展开式为________.

13. 若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 5 & 0 & 3\end{bmatrix}$，则 $|2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=$ ________.

14. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布$(\lambda>0)$，已知 $E[(X-2)(X-3)]=2$，则 $\lambda=$ ________.

三、解答题：15 ～ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{\ln(1+x^2)}\right]$.

16.（本题满分 10 分）

设 D 是位于曲线 $y=\sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}}(a>1, 0\leqslant x<+\infty)$ 下方，x 轴上方的无界区域.

（Ⅰ）求区域 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积；

（Ⅱ）当 a 为何值时，$V(a)$ 最小？并求此最小值.

17.（本题满分 10 分）

设 $z=x^3 f\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)$，$f$ 具有连续二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

18.（本题满分 10 分）

计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} xz\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 Σ 为曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

19.（本题满分 10 分）

已知 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内二阶可导，且 $f(0)+f(1)=2f(2)=2\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$.

证明：(1) 存在 $\xi\in[0,1]$，使 $f(\xi)=\dfrac{f(0)+f(1)}{2}$；

(2) 存在 $\eta\in(0,3)$，使 $f''(\eta)=0$.

20.（本题满分 11 分）

a,b 取何值时，线性方程组

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -a & -1\\ 1 & 4 & -4 & a-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 1\\ b+3\end{bmatrix}$$

有唯一解、无解、有无穷多解？并在有无穷多解时，求出该方程组的通解.

21.（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_1x_3-x_2x_3)$，

(1) 写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$；

(2) 求一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 成对角矩阵；

(3) 写出 f 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 下化成的标准形.

22.（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(X,Y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 1\}$ 上服从均匀分布.

求：(1) (X,Y) 关于 X,Y 的边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$；

(2) 判断 X 与 Y 是否独立？为什么？

(3) $Z=X+Y$ 的分布函数 $F_Z(z)$ 与概率密度 $f_Z(z)$.

23.（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 其中 $\theta>0$ 未知. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本.

求：(1) θ 的矩估计量；

(2) θ 的最大似然估计量；

(3) EZ，其中 $Z=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$.

2020 考研数学全程班阶段测试
（数学一）参考答案

一、选择题

1. C　2. D　3. A　4. C　5. A　6. D　7. C　8. A

二、填空题

9. e　10. $1+\frac{2}{3}\sqrt{2}$　11. $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}+xe^x)$

12. $-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right](x-1)^n, x\in(-1,3)$

13. 72　14. 2

三、解答题

15.【解】 原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)-\sin^2x}{\sin^2x\cdot\ln(1+x^2)}$ （1 分）

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)-\sin^2x}{x^4}$ （3 分）

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)-x^2}{x^4}+\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x}{x^4}$ （5 分）

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^4}{x^4}+\lim\limits_{x\to0}\frac{(x+\sin x)(x-\sin x)}{x^4}$ （7 分）

$=-\frac{1}{2}+\lim\limits_{x\to0}\frac{(2x)\left(\frac{1}{6}x^3\right)}{x^4}$ （9 分）

$=-\frac{1}{6}$ （10 分）

16.【解】 （Ⅰ）所求旋转体的体积为

$V(a)=\pi\int_0^{+\infty}xa^{-\frac{x}{a}}\mathrm{d}x=-\frac{a}{\ln a}\pi\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}a^{-\frac{x}{a}}$ （2 分）

$=-\frac{a}{\ln a}\pi\left[xa^{-\frac{x}{a}}\right]\Big|_0^{+\infty}+\frac{a}{\ln a}\pi\int_0^{+\infty}a^{-\frac{x}{a}}\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{a}{\ln a}\right)^2.$ （5 分）

（Ⅱ）$V'(a)=2\pi\frac{a(\ln a-1)}{\ln^3a}$，

令 $V'(a)=0$，得 $\ln a=1$，从而 $a=\mathrm{e}$. （7 分）

当 $1<a<\mathrm{e}$ 时，$V'(a)<0$，$V(a)$ 单调减少；

当 $a>\mathrm{e}$ 时，$V'(a)>0$，$V(a)$ 单调增加.

所以 $a=\mathrm{e}$ 时，V 最小. 最小体积为 $V(\mathrm{e})=\pi\left(\frac{\mathrm{e}}{\ln\mathrm{e}}\right)^2=\pi\mathrm{e}^2$. （10 分）

17.【解】 $\frac{\partial z}{\partial y}=x^4f_1'+x^2f_2'$， （2 分）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^4\left[xf''_{11} + \frac{1}{x}f''_{12}\right] + x^2\left[xf''_{21} + \frac{1}{x}f''_{22}\right] \qquad (5\text{ 分})$$

$$= x^5 f''_{11} + 2x^3 f''_{12} + xf''_{22}, \qquad (6\text{ 分})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4x^3 f'_1 + x^4\left[yf''_{11} - \frac{y}{x^2}f''_{12}\right] + 2xf'_2 + x^2\left[yf''_{21} - \frac{y}{x^2}f''_{22}\right] \qquad (9\text{ 分})$$

$$= 4x^3 f'_1 + 2xf'_2 + x^4 yf''_{11} - yf''_{22}. \qquad (10\text{ 分})$$

18.【解】 补 xOy 面上的圆 $x^2+y^2 \leqslant a^2$ 的下侧，记为 S，则

$$I = \oiint_{\Sigma+S} - \iint_S \qquad (2\text{ 分})$$

$$= \iiint_\Omega (z + 2z + 3xy)\,\mathrm{d}v - 0 \qquad (5\text{ 分})$$

$$\iiint_\Omega 3xy\,\mathrm{d}v = 0 \qquad (6\text{ 分})$$

$$\iiint_\Omega 3z\,\mathrm{d}v = 3\int_0^a z\pi(a^2 - z^2)\,\mathrm{d}z \qquad (9\text{ 分})$$

$$= \frac{3\pi a^4}{4} \qquad (10\text{ 分})$$

19.【证】 (1) 由于 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，则在该区间存在最小值 m 和最大值 M，又

$$m \leqslant \frac{m+m}{2} \leqslant \frac{f(0)+f(1)}{2} \leqslant \frac{M+M}{2} = M \qquad (2\text{ 分})$$

由连续函数介值定理可知，存在 $\xi \in [0,1]$，使

$$f(\xi) = \frac{f(0)+f(1)}{2} \qquad (4\text{ 分})$$

(2) 由积分中值定理得，存在 $c \in (2,3)$，使得

$$\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)$$

则

$$f(\xi) = f(2) = f(c) \qquad (6\text{ 分})$$

由罗尔定理可知，存在 $\xi_1 \in (\xi,2)$，$\xi_2 \in (2,c)$ 使得

$$f'(\xi_1) = 0, f'(\xi_2) = 0 \qquad (8\text{ 分})$$

再由罗尔定理可知，存在 $\eta \in (\xi_1,\xi_2)$ 使得

$$f''(\eta) = 0. \qquad (10\text{ 分})$$

20.【解】 增广矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 & b+1 \end{bmatrix}$. (3 分)

(1) 当 $a \neq 2$ 时，$r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 4$，方程组有唯一解. (6 分)

(2) 当 $a = 2$，且 $b \neq -1$ 时，$r(\boldsymbol{A}) = 2$，$r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 3$，方程组无解. (8 分)

(3) 当 $a = 2$ 且 $b = -1$ 时，$r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 2$ 该方程组有无穷多解，其通解为

$\boldsymbol{x} = (-2,1,0,0)^{\mathrm{T}} + c_1(-4,2,1,0)^{\mathrm{T}} + c_2(-4,1,0,1)^{\mathrm{T}}$. (11 分)

21.【解】 (1)$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$； (2 分)

(2) 特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$，$\lambda_3 = 0$. (4 分)

当 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 时特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$，

当 $\lambda_3=0$ 时，$\boldsymbol{\xi}_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$.

取 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)$ 为正交矩阵，可使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(6,6,0)$；（10 分）

(3) $f=6y_1^2+6y_2^2$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 下化成的标准形.（11 分）

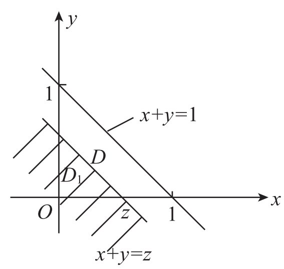
22.【解】 (1) 记 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，则

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$（2 分）

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{1-x}2\mathrm{d}y, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}2(1-x), & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

根据对称性 $f_Y(y)=\begin{cases}2(1-y), & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$（4 分）

(2) $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 不独立.（6 分）



(3) $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $0\leqslant z\leqslant 1$ 时，$F_Z(z)=\displaystyle\iint_{D_1}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2S_{D_1}=z^2$；

当 $1<z$ 时，$F_Z(z)=1$.（9 分）

总之，$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ z^2, & 0\leqslant z\leqslant 1,\\ 1, & 1<z.\end{cases}$

$$f_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases}2z, & 0\leqslant z\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$（11 分）

23.【解】 (1) $EX=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}x=\theta\int_0^{+\infty}\frac{x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}\,\frac{x}{\theta}=\theta\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\theta.$

$EX=\overline{X}$ 故 $\theta=\overline{X}$，θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1=\overline{X}$.（3 分）

(2) 似然函数 $L(\theta)=\displaystyle\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}, & x_1,\cdots,x_n>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$ 时，$\ln L(\theta)=-n\ln\theta-\dfrac{1}{\theta}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i$，

令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$ 解得 $\theta=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i$，最大似然估计量 $\hat{\theta}_2=\overline{X}$.（7 分）

(3) $X\sim f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 其分布函数 $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$Z=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，记 Z 的分布函数 $F_Z(z)$，密度为 $f_Z(z)$.

当 $z>0$ 时，$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)\leqslant z\}$

$$= 1 - P\{\min(X_1, X_2, \cdots, X_n) > z\} = 1 - P\{X_1 > z, X_2 > z, \cdots, X_n > z\}$$
$$= 1 - P\{X_1 > z\}P\{X_2 > z\}\cdots P\{X_n > z\}$$
$$= 1 - \left(\int_z^{+\infty} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx\right)^n = 1 - e^{-\frac{n}{\theta}z}.$$

当 $z \leqslant 0$ 时，$F_Z(z) = 0$.

总之 $F_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{n}{\theta}z}, & z > 0, \\ 0, & z \leqslant 0. \end{cases}$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{n}{\theta} e^{-\frac{n}{\theta}z}, & z > 0, \\ 0, & z \leqslant 0. \end{cases}$$

$$EZ = \int_{-\infty}^{+\infty} z f_Z(z) dz = \int_0^{+\infty} z \frac{n}{\theta} e^{-\frac{n}{\theta}z} dz = \frac{\theta}{n} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = \frac{\theta}{n}.$$ （11 分）