

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中的横线上.

9. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x^2)^{\frac{1}{x(\sin x - \tan x)}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 设 $f(x) = \int_{-1}^x (1 - |t|) dt (x \geq -1)$, 则曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴所围图形的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

11. 已知方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, 则方程 $y'' + ay' + by = e^x$ 满足初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = \frac{3}{2}$ 的特解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

12. 函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4}$ 在 $x = 1$ 处的幂级数展开式为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

13. 若矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 则 $|2AA^T| = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布 ($\lambda > 0$), 已知 $E[(X-2)(X-3)] = 2$, 则 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\ln(1+x^2)} \right]$.

16. (本题满分 10 分)

设 D 是位于曲线 $y = \sqrt{xa} - \frac{x}{2a} (a > 1, 0 \leq x < +\infty)$ 下方, x 轴上方的无界区域.

(I) 求区域 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积;

(II) 当 a 为何值时, $V(a)$ 最小? 并求此最小值.

17. (本题满分 10 分)

设 $z = x^3 f\left(xy, \frac{y}{x}\right)$, f 具有连续二阶偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

18. (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D (x + y + \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$, 其中区域 D 由不等式 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 所确定.

19. (本题满分 10 分)

已知 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 在 $(0, 3)$ 内二阶可导, 且 $f(0) + f(1) = 2f(2) = 2 \int_2^3 f(x) dx$.

证明: (1) 存在 $\xi \in [0, 1]$, 使 $f(\xi) = \frac{f(0) + f(1)}{2}$;

(2) 存在 $\eta \in (0, 3)$, 使 $f''(\eta) = 0$.

20. (本题满分 11 分)

a, b 取何值时, 线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -a & -1 \\ 1 & 4 & -4 & a-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ b+3 \end{bmatrix}$$

有唯一解、无解、有无穷多解? 并在有无穷多解时, 求出该方程组的通解.

21. (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3)$,

- (1) 写出二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 的矩阵 \mathbf{A} ;
- (2) 求一个正交矩阵 \mathbf{P} , 使 $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$ 成对角矩阵;
- (3) 写出 f 在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y}$ 下化成的标准形.

22. (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(X, Y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ 上服从均匀分布.

- 求: (1) (X, Y) 关于 X, Y 的边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$;
- (2) 判断 X 与 Y 是否独立? 为什么?
 - (3) $Z = X + Y$ 的分布函数 $F_Z(z)$ 与概率密度 $f_Z(z)$.

23. (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 其中 $\theta > 0$ 未知. X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X

的样本.

- 求: (1) θ 的矩估计量;
- (2) θ 的最大似然估计量;
 - (3) EZ , 其中 $Z = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

2020 考研数学全程班阶段测试 (数学三) 参考答案

一、选择题

1. C 2. D 3. A 4. C 5. A 6. D 7. C 8. A

二、填空题

9. e 10. $1 + \frac{2}{3}\sqrt{2}$ 11. $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x} + xe^x)$

12. $-\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \right] (x-1)^n, x \in (-1, 3)$

13. 72 14. 2

三、解答题

15. 【解】 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2) - \sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \ln(1+x^2)}$ (1分)

= $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2) - \sin^2 x}{x^4}$ (3分)

= $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2) - x^2}{x^4} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4}$ (5分)

= $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^4}{x^4} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \sin x)(x - \sin x)}{x^4}$ (7分)

= $-\frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x) \left(\frac{1}{6}x^3 \right)}{x^4}$ (9分)

= $-\frac{1}{6}$ (10分)

16. 【解】 (I) 所求旋转体的体积为

$$V(a) = \pi \int_0^{+\infty} xa^{-\frac{x}{a}} dx = -\frac{a}{\ln a} \pi \int_0^{+\infty} x da^{-\frac{x}{a}} \quad (2分)$$

$$= -\frac{a}{\ln a} \pi \left[xa^{-\frac{x}{a}} \right] \Big|_0^{+\infty} + \frac{a}{\ln a} \pi \int_0^{+\infty} a^{-\frac{x}{a}} dx = \pi \left(\frac{a}{\ln a} \right)^2. \quad (5分)$$

(II) $V'(a) = 2\pi \frac{a(\ln a - 1)}{\ln^3 a},$

令 $V'(a) = 0$, 得 $\ln a = 1$, 从而 $a = e$. (7分)

当 $1 < a < e$ 时, $V'(a) < 0$, $V(a)$ 单调减少;

当 $a > e$ 时, $V'(a) > 0$, $V(a)$ 单调增加.

所以 $a = e$ 时, V 最小. 最小体积为 $V(e) = \pi \left(\frac{e}{\ln e} \right)^2 = \pi e^2$. (10分)

17. 【解】 $\frac{\partial z}{\partial y} = x^4 f'_1 + x^2 f'_2,$ (2分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^4 \left[x f''_{11} + \frac{1}{x} f''_{12} \right] + x^2 \left[x f''_{21} + \frac{1}{x} f''_{22} \right] \quad (5 \text{ 分})$$

$$= x^5 f''_{11} + 2x^3 f''_{12} + x f''_{22}, \quad (6 \text{ 分})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4x^3 f'_1 + x^4 \left[y f''_{11} - \frac{y}{x^2} f''_{12} \right] + 2x f'_2 + x^2 \left[y f''_{21} - \frac{y}{x^2} f''_{22} \right] \quad (9 \text{ 分})$$

$$= 4x^3 f'_1 + 2x f'_2 + x^4 y f''_{11} - y f''_{22}. \quad (10 \text{ 分})$$

18.【解】 积分域 $D, x^2 + y^2 \leq 2x$ 关于 x 轴对称, 则

$$\iint_D y dx dy = 0 \quad (2 \text{ 分})$$

积分域 $D, x^2 + y^2 \leq 2x$ 关于 $x = 1$ 轴对称, 则

$$\iint_D x dx dy = \iint_D [(x-1) + 1] dx dy = \iint_D 1 dx dy = \pi \quad (4 \text{ 分})$$

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^2 d\rho \quad (7 \text{ 分})$$

$$= \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta \quad (8 \text{ 分})$$

$$= \frac{32}{9} \quad (9 \text{ 分})$$

$$\iint_D (x + y + \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = \pi + \frac{32}{9} \quad (10 \text{ 分})$$

19.【证】 (1) 由于 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 则在该区间存在最小值 m 和最大值 M , 又

$$m \leq \frac{m+m}{2} \leq \frac{f(0)+f(1)}{2} \leq \frac{M+M}{2} = M \quad (2 \text{ 分})$$

由连续函数介值定理可知, 存在 $\xi \in [0, 1]$, 使

$$f(\xi) = \frac{f(0)+f(1)}{2} \quad (4 \text{ 分})$$

(2) 由积分中值定理得, 存在 $c \in (2, 3)$, 使得

$$\int_2^3 f(x) dx = f(c)$$

则

$$f(\xi) = f(2) = f(c) \quad (6 \text{ 分})$$

由罗尔定理可知, 存在 $\xi_1 \in (\xi, 2), \xi_2 \in (2, c)$ 使得

$$f'(\xi_1) = 0, f'(\xi_2) = 0 \quad (8 \text{ 分})$$

再由罗尔定理可知, 存在 $\eta \in (\xi_1, \xi_2)$ 使得

$$f''(\eta) = 0. \quad (10 \text{ 分})$$

20.【解】 增广矩阵 $(A, b) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 & b+1 \end{bmatrix}.$ (3 分)

(1) 当 $a \neq 2$ 时, $r(A) = r(\bar{A}) = 4$, 方程组有唯一解. (6 分)

(2) 当 $a = 2$, 且 $b \neq -1$ 时, $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 3$, 方程组无解. (8 分)

(3) 当 $a = 2$ 且 $b = -1$ 时, $r(A) = r(\bar{A}) = 2$ 该方程组有无穷多解, 其通解为 $x = (-2, 1, 0, 0)^T + c_1(-4, 2, 1, 0)^T + c_2(-4, 1, 0, 1)^T.$ (11 分)

21.【解】 (1) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix};$ (2分)

(2) 特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 0.$ (4分)

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ 时特征向量为 $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$

当 $\lambda_3 = 0$ 时, $\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

取 $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 为正交矩阵, 可使 $P^{-1}AP = \text{diag}(6, 6, 0);$ (10分)

(3) $f = 6y_1^2 + 6y_2^2$ 在正交变换 $x = Py$ 下化成的标准形. (11分)

22.【解】 (1) 记 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, 则

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & (x, y) \in D; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (2分)$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^{1-x} 2 dy, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 2(1-x), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

根据对称性 $f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y), & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ (4分)

(2) $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, 所以 X 与 Y 不独立. (6分)

(3) $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X+Y \leq z\}$

当 $z < 0$ 时, $F_Z(z) = 0;$

当 $0 \leq z \leq 1$ 时, $F_Z(z) = \iint_{D_1} 2 dx dy = 2S_{D_1} = z^2;$

当 $1 < z$ 时, $F_Z(z) = 1.$

总之, $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ z^2, & 0 \leq z \leq 1, \\ 1, & 1 < z. \end{cases}$

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} 2z, & 0 \leq z \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (11分)$$

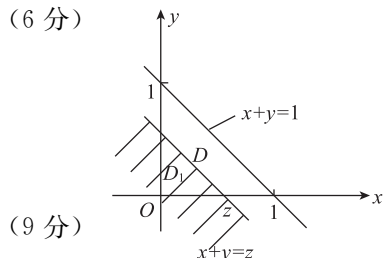
23.【解】 (1) $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \theta \int_0^{+\infty} \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} d \frac{x}{\theta} = \theta \int_0^{+\infty} te^{-t} dt = \theta.$

$EX = \bar{X}$ 故 $\theta = \bar{X}$, θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1 = \bar{X}.$ (3分)

(2) 似然函数 $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i}, & x_1, \dots, x_n > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

当 $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ 时, $\ln L(\theta) = -n \ln \theta - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i,$

令 $\frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = 0$ 解得 $\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, 最大似然估计量 $\hat{\theta}_2 = \bar{X}.$ (7分)



(9分)

$$(3) X \sim f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad \text{其分布函数 } F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$Z = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 记 Z 的分布函数 $F_Z(z)$, 密度为 $f_Z(z)$.

$$\begin{aligned} \text{当 } z > 0 \text{ 时, } F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq z\} \\ &= 1 - P\{\min(X_1, X_2, \dots, X_n) > z\} = 1 - P\{X_1 > z, X_2 > z, \dots, X_n > z\} \\ &= 1 - P\{X_1 > z\}P\{X_2 > z\} \cdots P\{X_n > z\} \\ &= 1 - \left(\int_z^{+\infty} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx \right)^n = 1 - e^{-\frac{n}{\theta}z}. \end{aligned}$$

当 $z \leq 0$ 时, $F_Z(z) = 0$.

$$\text{总之 } F_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{n}{\theta}z}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{n}{\theta} e^{-\frac{n}{\theta}z}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

$$EZ = \int_{-\infty}^{+\infty} z f_Z(z) dz = \int_0^{+\infty} z \frac{n}{\theta} e^{-\frac{n}{\theta}z} dz = \frac{\theta}{n} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = \frac{\theta}{n}. \quad (11 \text{ 分})$$