# 1987 年全国硕士研究生招生考试试题

【编者注】1987 年到 1996 年的数学试卷 Ⅰ,Ⅱ 均为现在的数学一.

## (试卷 Ⅰ)

### 一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 与两直线$\begin{cases}x=1,\\ y=-1+t,\\ z=2+t\end{cases}$及$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$都平行,且过原点的平面方程为______.

(2) 当 $x=$ ______时,函数 $y=x2^x$ 取得极小值.

(3) 由曲线 $y=\ln x$ 与两直线 $y=(\mathrm{e}+1)-x$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形的面积是______.

(4) 设 $L$ 为取正向的圆周 $x^2+y^2=9$,则曲线积分$\oint_L(2xy-2y)\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y$ 的值是______.

(5) 已知 3 维线性空间的一组基底为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)$,则向量 $\boldsymbol{u}=(2,0,0)$ 在上述基底下的坐标是______.

### 二、(本题满分 8 分)

求正常数 $a$ 与 $b$,使等式$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{bx-\sin x}\displaystyle\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\mathrm{d}t=1$ 成立.

### 三、(本题满分 7 分)

(1) 设 $f,g$ 为连续可微函数,$u=f(x,xy)$,$v=g(x+xy)$,求$\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

(2)设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$,其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}$,求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

### 四、(本题满分 8 分)

求微分方程 $y'''+6y''+(9+a^2)y'=1$ 的通解,其中常数 $a>0$.

### 五、选择题(本大题共 4 小题,每小题 3 分,满分 12 分)

(1) 设常数 $k>0$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k+n}{n^2}$(  )

(A) 发散.　　(B) 绝对收敛.

(C) 条件收敛.　　(D) 收敛或发散与 $k$ 的取值有关.

(2) 设 $f(x)$ 为已知连续函数,$I=t\displaystyle\int_0^{\frac{s}{t}}f(tx)\mathrm{d}x$,其中 $t>0,s>0$,则 $I$ 的值(  )

(A) 依赖于 $s$ 和 $t$.　　(B) 依赖于 $s,t,x$.
(C) 依赖于 $t$ 和 $x$,不依赖于 $s$.　　(D) 依赖于 $s$,不依赖于 $t$.

(3) 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$,则在 $x=a$ 处(　　)

(A) $f(x)$ 的导数存在,且 $f'(a)\neq 0$.　　(B) $f(x)$ 取得极大值.
(C) $f(x)$ 取得极小值.　　(D) $f(x)$ 的导数不存在.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵,且 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=a\neq 0$,而 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则 $|\boldsymbol{A}^*|$ 等于(　　)

(A) $a$.　　(B) $\dfrac{1}{a}$.　　(C) $a^{n-1}$.　　(D) $a^n$.

**六、(本题满分 10 分)**

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n2^n}x^{n-1}$ 的收敛域,并求其和函数.

**七、(本题满分 10 分)**

计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}x(8y+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\Sigma$ 是由曲线 $\begin{cases}z=\sqrt{y-1},\\ x=0,\end{cases}(1\leqslant y\leqslant 3)$ 绕 $y$ 轴旋转一周所成的曲面,它的法向量与 $y$ 轴正向的夹角恒大于 $\dfrac{\pi}{2}$.

**八、(本题满分 10 分)**

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上可微,对于 $[0,1]$ 上的每一个 $x$,函数 $f(x)$ 的值都在开区间 $(0,1)$ 内,且 $f'(x)\neq 1$. 证明:在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 $x$,使 $f(x)=x$.

**九、(本题满分 8 分)**

问 $a,b$ 为何值时,线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ x_2+2x_3+2x_4=1,\\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b,\\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1\end{cases}$$

有唯一解,无解,有无穷多组解?并求出有无穷多组解时的通解.

**十、填空题(本题共 3 小题,每小题 2 分,满分 6 分)**

(1) 设在一次试验中,事件 $A$ 发生的概率为 $p$. 现进行 $n$ 次独立试验,则 $A$ 至少发生一次的概率为______;而事件 $A$ 至多发生一次的概率为______.

(2) 三个箱子,第一个箱子中有 4 个黑球 1 个白球,第二个箱子中有 3 个黑球 3 个白球,第三个箱子中有 3 个黑球 5 个白球. 现随机地取一个箱子,再从这个箱子中取出 1 个球,这个球为白球的概

率等于______. 已知取出的球是白球,此球属于第二个箱子的概率为______.

(3) 已知连续型随机变量 $X$ 的概率密度函数为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}$,则 $X$ 的数学期望为______,$X$ 的方差为______.

**十一、(本题满分 6 分)**

设随机变量 $X,Y$ 相互独立,其概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

求随机变量 $Z=2X+Y$ 的概率密度函数.

## (试卷 Ⅱ)

**一、(本题满分 15 分)**【同试卷 Ⅰ 第一题】

**二、(本题共 2 小题,满分 14 分)**

(1)(本题满分 6 分) 计算定积分 $\int_{-2}^{2}(|x|+x)e^{-|x|}\,dx$.

(2)(本题满分 8 分)【同试卷 Ⅰ 第二题】

**三、(本题满分 7 分)**

设 $z=f(u,x,y)$,$u=xe^y$,其中 $f$ 具有二阶连续偏导数,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

**四、(本题满分 8 分)**【同试卷 Ⅰ 第四题】

**五、(本题满分 12 分)**【同试卷 Ⅰ 第五题】

**六、(本题满分 10 分)**【同试卷 Ⅰ 第六题】

**七、(本题满分 10 分)**【同试卷 Ⅰ 第七题】

**八、(本题满分 10 分)**【同试卷 Ⅰ 第八题】

**九、(本题满分 8 分)**【同试卷 Ⅰ 第九题】

**十、(本题满分 6 分)**

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶矩阵,$\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值,$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 是分别属于 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 的特征向量. 试证明 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

# 1988 年全国硕士研究生招生考试试题

## (试卷 Ⅰ)

**一、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)**

(1) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{n3^n}$ 的收敛域.

(2) 已知 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

(3) 设 $\Sigma$ 为曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧,计算曲面积分

$$I=\oiint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

**二、填空题(本题共 4 小题,每小题 3 分,满分 12 分)**

(1) 若 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2tx}$,则 $f'(t)=$______.

(2) 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数,它在区间 $(-1,1]$ 上的定义为

$$f(x)=\begin{cases}2, & -1<x\leqslant 0,\\ x^3, & 0<x\leqslant 1,\end{cases}$$

则 $f(x)$ 的傅里叶(Fourier)级数在 $x=1$ 处收敛于______.

(3) 设 $f(x)$ 是连续函数,且 $\int_0^{x^3-1}f(t)\mathrm{d}t=x$,则 $f(7)=$______.

(4) 设 4×4 矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)$,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)$,其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$ 均为 4 维列向量,且已知行列式 $|\boldsymbol{A}|=4$, $|\boldsymbol{B}|=1$,则行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$______.

**三、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)**

(1) 设 $f(x)$ 可导且 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$,则当 $\Delta x\to 0$ 时, 该函数在 $x=x_0$ 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是(　　)

(A) 与 $\Delta x$ 等价的无穷小.　　(B) 与 $\Delta x$ 同阶的无穷小.

(C) 与 $\Delta x$ 低阶的无穷小.　　(D) 比 $\Delta x$ 高阶的无穷小.

(2) 设 $y=f(x)$ 是方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解,且 $f(x_0)>0$, $f'(x_0)=0$,则函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处(　　)

(A) 取得极大值.　　(B) 取得极小值.

(C) 某邻域内单调增加.　　(D) 某邻域内单调减少.

(3) 设有空间区域 $\Omega_1:x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,z\geqslant 0$;及 $\Omega_2:x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0$,则(　　)

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1}x\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}x\mathrm{d}v$.　　(B) $\iiint\limits_{\Omega_1}y\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}y\mathrm{d}v$.

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1}z\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}z\mathrm{d}v$.　　(D) $\iiint\limits_{\Omega_1}xyz\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}xyz\mathrm{d}v$.

(4) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛,则此级数在 $x=2$ 处(　　)

(A) 条件收敛.　　(B) 绝对收敛.

(C) 发散.　　(D) 收敛性不能确定.

(5) $n$ 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(3\leqslant s\leqslant n)$ 线性无关的充分必要条件是(　　)

(A)存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\mathbf{0}$.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量都线性无关.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中存在一个向量,它不能用其余向量线性表出.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表出.

**四、(本题满分 6 分)**

设 $u=yf\left(\frac{x}{y}\right)+xg\left(\frac{y}{x}\right)$,其中函数 $f,g$ 具有二阶连续导数,求 $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

**五、(本题满分 8 分)**

设函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y''-3y'+2y=2\mathrm{e}^x$,且其图形在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线 $y=x^2-x+1$ 在该点的切线重合,求函数 $y=y(x)$.

**六、(本题满分 9 分)**

设位于点 $(0,1)$ 的质点 $A$ 对质点 $M$ 的引力大小为 $\frac{k}{r^2}$ ($k>0$ 为常数,$r$ 为质点 $A$ 与 $M$ 之间的距离),质点 $M$ 沿曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 自 $B(2,0)$ 运动到 $O(0,0)$,求在此运动过程中质点 $A$ 对质点 $M$ 的引力所作的功.

**七、(本题满分 6 分)**

已知 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$,其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^5$.

**八、(本题满分 8 分)**

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 相似.

(1)求 $x$ 与 $y$;

(2)求一个满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

**九、(本题满分 9 分)**

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且在 $(a,b)$ 内有 $f'(x)>0$. 证明:在 $(a,b)$ 内存在唯一的 $\xi$,使曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi)$,$x=a$ 所围平面图形面积 $S_1$ 是曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi)$,$x=b$ 所围平面图形面积 $S_2$ 的 3 倍.

**十、填空题(本题共 3 小题,每小题 2 分,满分 6 分)**

(1) 设三次独立试验中,事件 $A$ 出现的概率相等.若已知 $A$ 至少出现一次的概率等于$\frac{19}{27}$,则事件 $A$ 在一次试验中出现的概率为______.

(2) 在区间(0,1)中随机地取两个数,则事件“两数之和小于$\frac{6}{5}$”的概率为______.

(3) 设随机变量 $X$ 服从均值为 10,均方差为 0.02 的正态分布.已知

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du,\quad \Phi(2.5)=0.9938,$$

则 $X$ 落在区间(9.95,10.05)内的概率为______.

**十一、(本题满分 6 分)**

设随机变量 $X$ 的概率密度函数为 $f_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$,求随机变量 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

## (试卷 Ⅱ)

**一、(本题满分 15 分)**【同试卷 Ⅰ　第一题】
**二、(本题满分 12 分)**【同试卷 Ⅰ　第二题】
**三、(本题满分 15 分)**【同试卷 Ⅰ　第三题】

**四、(本题共 3 小题,每小题 6 分,满分 18 分)**

(1)【同试卷 Ⅰ　第四题】

(2) 计算二次积分 $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}dy$.

(3) 求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上某点 $M$ 处的切平面 $\pi$ 的方程,使 $\pi$ 过已知直线 $L:\frac{x-6}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{2z-1}{-2}$.

**五、(本题满分 8 分)**【同试卷 Ⅰ　第五题】
**六、(本题满分 9 分)**【同试卷 Ⅰ　第六题】
**七、(本题满分 6 分)**【同试卷 Ⅰ　第七题】
**八、(本题满分 8 分)**【同试卷 Ⅰ　第八题】
**九、(本题满分 9 分)**【同试卷 Ⅰ　第九题】

# 1989 年全国硕士研究生招生考试试题

## （试卷 Ⅰ）

**一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）**

（1）已知 $f'(3)=2$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$ ______.

（2）设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，则 $f(x)=$ ______.

（3）设平面曲线 $L$ 为下半圆 $y=-\sqrt{1-x^2}$，则曲线积分 $\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s=$ ______.

（4）向量场 $\boldsymbol{u}(x,y,z)=xy^2\boldsymbol{i}+ye^z\boldsymbol{j}+x\ln(1+z^2)\boldsymbol{k}$ 在点 $P(1,1,0)$ 处的散度 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=$ ______.

（5）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则逆矩阵 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=$ ______.

**二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）**

（1）当 $x>0$ 时，曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$（　　）

（A）有且仅有水平渐近线.　　（B）有且仅有铅直渐近线.

（C）既有水平渐近线，也有铅直渐近线.　　（D）既无水平渐近线，也无铅直渐近线.

（2）已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 $P$ 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$，则点 $P$ 的坐标是（　　）

（A）$(1,-1,2)$.　　（B）$(-1,1,2)$.　　（C）$(1,1,2)$.　　（D）$(-1,-1,2)$.

（3）设线性无关的函数 $y_1,y_2,y_3$ 都是二阶非齐次线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解，$C_1,C_2$ 是任意常数，则该非齐次方程的通解是（　　）

（A）$C_1y_1+C_2y_2+y_3$.　　（B）$C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$.

（C）$C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$.　　（D）$C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$.

（4）设函数 $f(x)=x^2,0\leqslant x\leqslant 1$，而

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x,\ -\infty<x<+\infty,$$

其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x,n=1,2,3,\cdots$，则 $S\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ 等于（　　）

（A）$-\dfrac{1}{2}$.　　（B）$-\dfrac{1}{4}$.　　（C）$\dfrac{1}{4}$.　　（D）$\dfrac{1}{2}$.

（5）设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 中（　　）

（A）必有一列元素全为 0.

（B）必有两列元素对应成比例.

（C）必有一列向量是其余列向量的线性组合.

（D）任一列向量是其余列向量的线性组合.

**三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)**

(1) 设 $z=f(2x-y)+g(x,xy)$,其中函数 $f(t)$ 二阶可导,$g(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(2) 设曲线积分 $\int_C xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关,其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导数,且 $\varphi(0)=0$. 计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 的值.

(3) 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}v$,其中 $\Omega$ 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域.

**四、(本题满分 6 分)**

将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展开为 $x$ 的幂级数.

**五、(本题满分 7 分)**

设 $f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$,其中 $f$ 为连续函数,求 $f(x)$.

**六、(本题满分 7 分)**

证明:方程 $\ln x=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\mathrm{d}x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个不同实根.

**七、(本题满分 6 分)**

问 $\lambda$ 为何值时,线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_3=\lambda, \\ 4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2, \\ 6x_1+x_2+4x_3=2\lambda+3 \end{cases}$$

有解,并求出解的一般形式.

**八、(本题满分 8 分)**

假设 $\lambda$ 为 $n$ 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,证明:

(1) $\dfrac{1}{\lambda}$ 为 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值;

(2) $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

**九、(本题满分 9 分)**

设半径为 $R$ 的球面 $\Sigma$ 的球心在定球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 上,问当 $R$ 取何值时,球面 $\Sigma$ 在定球面内部的那部分的面积最大?

**十、填空题(本题共 3 小题,每小题 2 分,满分 6 分)**

(1) 已知随机事件 $A$ 的概率 $P(A)=0.5$,随机事件 $B$ 的概率 $P(B)=0.6$ 及条件概率 $P(B|A)=$

0.8,则和事件 $A \cup B$ 的概率 $P(A \cup B) =$ ______.

(2) 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次,其命中率分别为 0.6 和 0.5. 现已知目标被命中,则它是甲射中的概率为______.

(3) 若随机变量 $\xi$ 在(1,6)上服从均匀分布,则方程 $x^2 + \xi x + 1 = 0$ 有实根的概率是______.

**十一、(本题满分 6 分)**

设随机变量 $X$ 与 $Y$ 独立,且 $X$ 服从均值为 1、标准差(均方差)为 $\sqrt{2}$ 的正态分布,而 $Y$ 服从标准正态分布. 试求随机变量 $Z = 2X - Y + 3$ 的概率密度函数.

## (试卷 Ⅱ)

**一、(本题满分 15 分)**【同试卷 Ⅰ　第一题】

**二、(本题满分 15 分)**【同试卷 Ⅰ　第二题】

**三、(本题满分 15 分)**【同试卷 Ⅰ　第三题】

**四、(本题共 3 小题,每小题 6 分,满分 18 分)**

(1)【同试卷 Ⅰ　第四题】

(2) 求八分之一的球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$ 的边界曲线的重心,设曲线的线密度 $\rho = 1$.

(3) 设空间区域 $\Omega$ 由曲面 $z = a^2 - x^2 - y^2$ 与平面 $z = 0$ 围成,其中 $a$ 为正常数. 记 $\Omega$ 表面的外侧为 $S$, $\Omega$ 的体积为 $V$. 证明:

$$\oiint_S x^2yz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z - xy^2z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z(1 + xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = V.$$

**五、(本题满分 7 分)**【同试卷 Ⅰ　第五题】

**六、(本题满分 7 分)**【同试卷 Ⅰ　第六题】

**七、(本题满分 6 分)**【同试卷 Ⅰ　第七题】

**八、(本题满分 8 分)**【同试卷 Ⅰ　第八题】

**九、(本题满分 9 分)**【同试卷 Ⅰ　第九题】

# 1990 年全国硕士研究生招生考试试题

## (试卷 Ⅰ)

### 一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $\begin{cases} x=-t+2, \\ y=3t-4, \\ z=t-1 \end{cases}$ 垂直的平面方程是______.

(2) 设 $a$ 为非零常数,则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=$ ______.

(3) 设函数 $f(x)=\begin{cases} 1, & |x|\leqslant 1, \\ 0, & |x|>1, \end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$ ______.

(4) 积分 $\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$ 的值等于______.

(5) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,4,5)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,5,6)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(4,5,6,7)$,则该向量组的秩是______.

### 二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $f(x)$ 是连续函数,且 $F(x)=\int_x^{\mathrm{e}^{-x}} f(t)\mathrm{d}t$,则 $F'(x)$ 等于(　　)

(A) $-\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})-f(x)$.　　(B) $-\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})+f(x)$.

(C) $\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})-f(x)$.　　(D) $\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})+f(x)$.

(2) 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数,且 $f'(x)=[f(x)]^2$,则当 $n$ 为大于 2 的正整数时, $f(x)$ 的 $n$ 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 为(　　)

(A) $n![f(x)]^{n+1}$.　　(B) $n[f(x)]^{n+1}$.　　(C) $[f(x)]^{2n}$.　　(D) $n![f(x)]^{2n}$.

(3) 设 $\alpha$ 为常数,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$(　　)

(A) 绝对收敛.　　(B) 条件收敛.

(C) 发散.　　(D) 收敛性与 $\alpha$ 的取值有关.

(4) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续,且 $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$,则在点 $x=0$ 处 $f(x)$(　　)

(A) 不可导.　　(B) 可导,且 $f'(0)\neq 0$.

(C) 取得极大值.　　(D) 取得极小值.

(5) 已知 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系, $k_1$, $k_2$ 为任意常数,则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解(一般解)是(　　)

(A) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.　　(B) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

(C) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.　　(D) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

**三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)**

(1) 求$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\mathrm{d}x$.

(2) 设 $z=f(2x-y,y\sin x)$,其中 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(3) 求微分方程 $y''+4y'+4y=\mathrm{e}^{-2x}$ 的通解(一般解).

**四、(本题满分 6 分)**

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域,并求其和函数.

**五、(本题满分 8 分)**

求曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma} yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\Sigma$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 外侧在 $z\geqslant 0$ 的部分.

**六、(本题满分 7 分)**

设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间$(a,b)$内可导,且 $f(a)=f(b)$. 证明在$(a,b)$内至少存在一点 $\xi$,使得 $f'(\xi)>0$.

**七、(本题满分 6 分)**

设 4 阶矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix},$$

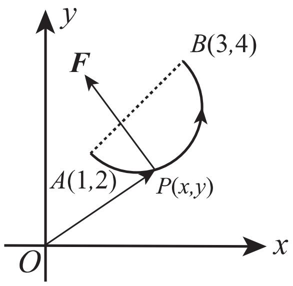
且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足关系式 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 4 阶单位矩阵,$\boldsymbol{C}^{-1}$ 表示 $\boldsymbol{C}$ 的逆矩阵,$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{C}$ 的转置矩阵. 将上述关系式化简并求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

**八、(本题满分 8 分)**

求一个正交变换化二次型 $f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$ 成标准形.

**九、(本题满分 8 分)**

质点 $P$ 沿着以 $AB$ 为直径的半圆周,从点 $A(1,2)$ 运动到点 $B(3,4)$ 的过程中受变力 $\boldsymbol{F}$ 作用(如图),$\boldsymbol{F}$ 的大小等于点 $P$ 与原点 $O$ 之间的距离,其方向垂直于线段 $OP$ 且与 $y$ 轴正向的夹角小于$\frac{\pi}{2}$. 求变力 $\boldsymbol{F}$ 对质点 $P$ 所作的功.



**十、填空题(本题共 3 小题,每小题 2 分,满分 6 分)**

(1) 已知随机变量 $X$ 的概率密度函数

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},\ -\infty<x<+\infty,$$

则 $X$ 的概率分布函数 $F(x)=$ ______.

(2) 设随机事件 $A,B$ 及其和事件 $A\cup B$ 的概率分别是 0.4,0.3 和 0.6. 若 $\overline{B}$ 表示 $B$ 的对立事件,那么积事件 $A\overline{B}$ 的概率 $P(A\overline{B})=$ ______.

(3) 已知随机变量 $X$ 服从参数为 2 的泊松分布,且随机变量 $Z=3X-2$,则 $E(Z)=$ ______.

**十一、(本题满分 6 分)**

设二维随机变量$(X,Y)$在区域 $D$:$0<x<1,|y|<x$ 内服从均匀分布,求关于 $X$ 的边缘概率密度函数及随机变量 $Z=2X+1$ 的方差 $D(Z)$.

## (试卷 Ⅱ)

**一、(本题满分 15 分)**【同试卷 Ⅰ　第一题】

**二、(本题满分 15 分)**【同试卷 Ⅰ　第二题】

**三、(本题满分 15 分)**【同试卷 Ⅰ　第三题】

**四、(本题共 3 小题,每小题 6 分,满分 18 分)**

(1)【同试卷 Ⅰ　第四题】

(2) 求微分方程 $x\ln x\mathrm{d}y+(y-\ln x)\mathrm{d}x=0$ 满足条件 $y|_{x=e}=1$ 的特解.

(3) 过点 $P(1,0)$ 作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线,该切线与上述抛物线及 $x$ 轴围成一平面图形,求此图形绕 $x$ 轴旋转一周所成旋转体的体积.

**五、(本题满分 8 分)**【同试卷 Ⅰ　第五题】

**六、(本题满分 7 分)**【同试卷 Ⅰ　第六题】

**七、(本题满分 6 分)**【同试卷 Ⅰ　第七题】

**八、(本题满分 8 分)**【同试卷 Ⅰ　第八题】

**九、(本题满分 8 分)**【同试卷 Ⅰ　第九题】

# 1991 年全国硕士研究生招生考试试题

## (试卷 Ⅰ)

**一、填空题(本题共 3 小题,每小题 3 分,满分 15 分)**

(1) 设$\begin{cases} x = 1 + t^2, \\ y = \cos t, \end{cases}$则$\dfrac{d^2 y}{dx^2} =$ ______.

(2) 由方程 $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$ 所确定的函数 $z = z(x,y)$ 在点$(1,0,-1)$处的全微分 $dz =$ ______.

(3) 已知两条直线的方程是 $L_1:\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-3}{-1}$,$L_2:\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1}$, 则过 $L_1$ 且平行于 $L_2$ 的 平面方程是______.

(4) 已知当 $x \to 0$ 时,$(1 + ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $\cos x - 1$ 是等价无穷小,则常数 $a =$ ______.

(5) 设 4 阶方阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1} =$ ______.

**二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)**

(1) 曲线 $y = \dfrac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}$(　　)

(A) 没有渐近线.
(B) 仅有水平渐近线.
(C) 仅有铅直渐近线.
(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线.

(2) 若连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x) = \int_0^{2x} f\left(\dfrac{t}{2}\right)dt + \ln 2$,则 $f(x)$ 等于(　　)

(A) $e^x \ln 2$.
(B) $e^{2x} \ln 2$.
(C) $e^x + \ln 2$.
(D) $e^{2x} + \ln 2$.

(3) 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = 2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 5$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 等于(　　)

(A) 3.
(B) 7.
(C) 8.
(D) 9.

(4) 设 $D$ 是 $xOy$ 平面上以$(1,1)$,$(-1,1)$和$(-1,-1)$为顶点的三角形区域,$D_1$ 是 $D$ 在第一象限的部分,则$\iint\limits_D (xy + \cos x\sin y)dxdy$ 等于(　　)

(A) $2\iint\limits_{D_1} \cos x\sin y\,dxdy$.
(B) $2\iint\limits_{D_1} xy\,dxdy$.
(C) $4\iint\limits_{D_1} (xy + \cos x\sin y)dxdy$.
(D) 0.

(5) 设 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足关系式 $\boldsymbol{ABC} = \boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 是 $n$ 阶单位阵,则必有(　　)

(A) $\boldsymbol{ACB} = \boldsymbol{E}$.
(B) $\boldsymbol{CBA} = \boldsymbol{E}$.
(C) $\boldsymbol{BAC} = \boldsymbol{E}$.
(D) $\boldsymbol{BCA} = \boldsymbol{E}$.

**三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)**

(1) 求$\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$.

(2) 设$\boldsymbol{n}$是曲面$2x^2+3y^2+z^2=6$在点$P(1,1,1)$处的指向外侧的法向量,求函数$u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$在点$P$处沿方向$\boldsymbol{n}$的方向导数.

(3) 求$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}v$,其中$\Omega$是由曲线$\begin{cases}y^2=2z,\\x=0\end{cases}$绕$z$轴旋转一周而成的曲面与平面$z=4$所围成的立体.

**四、(本题满分 6 分)**

在过点$O(0,0)$和$A(\pi,0)$的曲线族$y=a\sin x(a>0)$中,求一条曲线$L$,使沿该曲线从$O$到$A$的积分$\int_L(1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$的值最小.

**五、(本题满分 8 分)**

将函数$f(x)=2+|x|(-1\leqslant x\leqslant1)$展开成以 2 为周期的傅里叶级数,并由此求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$的和.

**六、(本题满分 7 分)**

设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续,$(0,1)$内可导,且$3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(0)$,证明:在$(0,1)$内存在一点$c$,使$f'(c)=0$.

**七、(本题满分 8 分)**

已知$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,3)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3,5)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2,1)$,$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,4,a+8)$及$\boldsymbol{\beta}=(1,1,b+3,5)$.

(1)$a,b$为何值时,$\boldsymbol{\beta}$不能表示成$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的线性组合?

(2)$a,b$为何值时,$\boldsymbol{\beta}$有$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的唯一的线性表示式?并写出该表示式.

**八、(本题满分 6 分)**

设$\boldsymbol{A}$是$n$阶正定阵,$\boldsymbol{E}$是$n$阶单位阵,证明$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$的行列式大于 1.

**九、(本题满分 8 分)**

在上半平面求一条向上凹的曲线,其上任一点$P(x,y)$处的曲率等于此曲线在该点的法线段$PQ$长度的倒数($Q$是法线与$x$轴的交点),且曲线在点$(1,1)$处的切线与$x$轴平行.

**十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分)**

(1) 若随机变量$X$服从均值为 2,方差为$\sigma^2$的正态分布,且$P\{2<X<4\}=0.3$,则$P\{X<0\}=$______.

(2) 随机地向半圆$0<y<\sqrt{2ax-x^2}$($a$为正常数)内掷一点,点落在半圆内任何区域的概率与区

域的面积成正比,则原点和该点的连线与 $x$ 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为______.

**十一、(本题满分 6 分)**

设二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 求随机变量 $Z=X+2Y$ 的分布函数.

## (试卷 Ⅱ)

**一、(本题满分 15 分)**【同试卷 Ⅰ 第一题】
**二、(本题满分 15 分)**【同试卷 Ⅰ 第二题】
**三、(本题满分 15 分)**【同试卷 Ⅰ 第三题】

**四、(本题共 3 小题,每小题 6 分,满分 18 分)**

(1) 求 $\int_3^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}$.

(2) 计算 $I=\iint\limits_S -y\,dz\,dx+(z+1)\,dx\,dy$,其中 $S$ 是圆柱面 $x^2+y^2=4$ 被平面 $x+z=2$ 和 $z=0$ 所截出部分的外侧.

(3)【同试卷 Ⅰ 第四题】

**五、(本题满分 8 分)**【同试卷 Ⅰ 第五题】
**六、(本题满分 7 分)**【同试卷 Ⅰ 第六题】
**七、(本题满分 8 分)**【同试卷 Ⅰ 第七题】
**八、(本题满分 6 分)**【同试卷 Ⅰ 第八题】
**九、(本题满分 8 分)**【同试卷 Ⅰ 第九题】

# 1992 年全国硕士研究生招生考试试题

## (试卷 Ⅰ)

### 一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+y}+\cos(xy)=0$ 确定,则$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ______.

(2) 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $\mathbf{grad}\ u\big|_M=$ ______.

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\leqslant 0,\\ 1+x^2, & 0<x\leqslant\pi,\end{cases}$ 则其以 $2\pi$ 为周期的傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于 ______.

(4) 微分方程 $y'+y\tan x=\cos x$ 的通解为 $y=$ ______.

(5) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{pmatrix}$,其中 $a_i\neq 0,b_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=$ ______.

### 二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 当 $x\to 1$ 时,函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限(　　)

(A) 等于 2.　　(B) 等于 0.

(C) 为 $\infty$.　　(D) 不存在但不为 $\infty$.

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{\alpha}{n}\right)$(常数 $\alpha>0$)(　　)

(A) 发散.　　(B) 条件收敛.

(C) 绝对收敛.　　(D) 收敛性与 $\alpha$ 有关.

(3) 在曲线 $x=t,y=-t^2,z=t^3$ 的所有切线中,与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线(　　)

(A) 只有 1 条.　　(B) 只有 2 条.　　(C) 至少有 3 条.　　(D) 不存在.

(4) 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$,则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 $n$ 为(　　)

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

(5) 要使 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$都是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解,只要系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为(　　)

(A)$(-2,1,1)$.　　(B)$\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

(C)$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$.　　(D)$\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 4 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1) 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

(2) 设 $z=f(e^x\sin y,x^2+y^2)$,其中 $f$ 具有二阶连续偏导数,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\leqslant 0,\\ e^{-x}, & x>0,\end{cases}$ 求$\int_1^3 f(x-2)\,dx$.

四、(本题满分 6 分)

求微分方程 $y''+2y'-3y=e^{-3x}$ 的通解.

五、(本题满分 8 分)

计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(x^3+az^2)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy$,其中 $\Sigma$ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

六、(本题满分 7 分)

设 $f''(x)<0$, $f(0)=0$,证明对任何 $x_1>0,x_2>0$,有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

七、(本题满分 8 分)

在变力 $\boldsymbol{F}=yz\,\boldsymbol{i}+zx\,\boldsymbol{j}+xy\,\boldsymbol{k}$ 的作用下,质点由原点沿直线运动到椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上第一卦限的点 $M(\xi,\eta,\zeta)$,问 $\xi,\eta,\zeta$ 取何值时,力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功 $W$ 最大?并求出 $W$ 的最大值.

八、(本题满分 7 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,问:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出?证明你的结论.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出?证明你的结论.

九、(本题满分 7 分)

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$,对应的特征向量依次为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}$,又向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$.

(1) 将 $\boldsymbol{\beta}$ 用 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性表出;

(2) 求 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$($n$ 为自然数).

**十、填空题(本题满分6分,每小题3分)**

(1) 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,$P(AB)=0$,$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$,则事件 $A,B,C$ 全不发生的概率为______.

(2) 设随机变量 $X$ 服从参数为1的指数分布,则数学期望 $E(X+e^{-2X})=$______.

**十一、(本题满分6分)**

设随机变量 $X$ 与 $Y$ 独立,$X$ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,$Y$ 服从 $[-\pi,\pi]$ 上的均匀分布,求 $Z=X+Y$ 的概率密度(计算结果用标准正态分布函数 $\Phi$ 表示,其中 $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$).

## (试卷 Ⅱ)

**一、(本题满分15分)**【同试卷 Ⅰ 第一题】

**二、(本题满分15分)**【同试卷 Ⅰ 第二题】

**三、(本题共3小题,每小题5分,满分15分)**

(1)【同试卷 Ⅰ 第三、(1)题】

(2)【同试卷 Ⅰ 第三、(2)题】

(3) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为3阶矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为3阶单位阵,满足 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}$,又知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$,求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

**四、(本题共3小题,每小题6分,满分18分)**

(1)【同试卷 Ⅰ 第四题】

(2) 求 $\frac{d}{dx}\int_{0}^{x^2}(x^2-t)f(t)dt$,其中 $f(t)$ 为已知的连续函数.

(3) 计算 $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{y}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx$.

**五、(本题满分8分)**【同试卷 Ⅰ 第五题】

**六、(本题满分7分)**【同试卷 Ⅰ 第六题】

**七、(本题满分8分)**【同试卷 Ⅰ 第七题】

**八、(本题满分7分)**【同试卷 Ⅰ 第八题】

**九、(本题满分7分)**【同试卷 Ⅰ 第九题】

# 1993 年全国硕士研究生招生考试试题

## (试卷 Ⅰ)

**一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)**

(1) 函数 $F(x)=\int_1^x\left(2-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t\ (x>0)$ 的单调减少区间为______.

(2) 由曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=12,\\ z=0\end{cases}$ 绕 $y$ 轴旋转一周得到的旋转面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量为______.

(3) 设函数 $f(x)=\pi x+x^2\ (-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数展开式为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则其中系数 $b_3$ 的值为______.

(4) 设数量场 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\operatorname{div}(\mathbf{grad}\ u)=$______.

(5) 设 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为零,且 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n-1$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为______.

**二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)**

(1) 设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\mathrm{d}t$，$g(x)=x^3+x^4$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的(　　)

(A) 等价无穷小.　　(B) 同阶但非等价的无穷小.

(C) 高阶无穷小.　　(D) 低阶无穷小.

(2) 双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 所围成的区域面积可用定积分表示为(　　)

(A) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta$.　　(B) $4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta$.

(C) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\theta}\mathrm{d}\theta$.　　(D) $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2\theta)^2\mathrm{d}\theta$.

(3) 设有直线 $L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+8}{1}$ 与 $L_2:\begin{cases}x-y=6,\\ 2y+z=3,\end{cases}$ 则 $L_1$ 与 $L_2$ 的夹角为(　　)

(A) $\frac{\pi}{6}$.　　(B $\frac{\pi}{4}$.　　( $\frac{\pi}{3}$.　　(D) $\frac{\pi}{2}$.

(4) 设曲线积分 $\int_L[f(x)-\mathrm{e}^x]\sin y\mathrm{d}x-f(x)\cos y\mathrm{d}y$ 与路径无关,其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数,且 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 等于(　　)

(A) $\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x}{2}$.　　(B) $\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

(C) $\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}-1$.　　(D) $1-\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

(5) 已知 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}$ 为 3 阶非零矩阵,且满足 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$,则(　　)

(A) $t=6$ 时 $\boldsymbol{P}$ 的秩必为 1.　　(B) $t=6$ 时 $\boldsymbol{P}$ 的秩必为 2.

(C) $t\neq 6$ 时 $\boldsymbol{P}$ 的秩必为 1.　　(D) $t\neq 6$ 时 $\boldsymbol{P}$ 的秩必为 2.

**三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)**

(1) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

(2) 求 $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x$.

(3) 求微分方程 $x^2y'+xy=y^2$ 满足初始条件 $y(1)=1$ 的特解.

**四、(本题满分 6 分)**

计算 $\displaystyle\oiint\limits_{\Sigma}2xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x-z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $\Sigma$ 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围立体的表面外侧.

**五、(本题满分 7 分)**

求级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$ 的和.

**六、(本题共 2 小题,每小题 5 分,满分 10 分)**

(1) 设在 $[0,+\infty)$ 上函数 $f(x)$ 有连续导数,且 $f'(x)\geqslant k>0$, $f(0)<0$,证明: $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有一个零点.

(2) 设 $b>a>\mathrm{e}$,证明 $a^b>b^a$.

**七、(本题满分 8 分)**

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3\ (a>0)$ 通过正交变换化成标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$,求参数 $a$ 及所用的正交变换矩阵.

**八、(本题满分 6 分)**

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times m$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵,其中 $n<m$, $\boldsymbol{E}$ 是 $n$ 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$,证明 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.

**九、(本题满分 6 分)**

设物体 $A$ 从点 $(0,1)$ 出发,以速度大小为常数 $v$ 沿 $y$ 轴正向运动. 物体 $B$ 从点 $(-1,0)$ 与 $A$ 同时出发,其速度大小为 $2v$,方向始终指向 $A$. 试建立物体 $B$ 的运动轨迹所满足的微分方程,并写出初始条件.

**十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分)**

(1) 一批产品共有10个正品和2个次品,任意抽取两次,每次抽一个,抽出后不再放回,则第二次抽出的是次品的概率为______.

(2) 设随机变量 $X$ 服从$(0,2)$上的均匀分布,则随机变量 $Y = X^2$ 在$(0,4)$内的概率密度 $f_Y(y) =$ ______.

**十一、(本题满分 6 分)**

设随机变量 $X$ 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}, -\infty < x < +\infty$.

(1) 求 $X$ 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$.

(2) 求 $X$ 与 $|X|$ 的协方差,并问 $X$ 与 $|X|$ 是否不相关?

(3) 问 $X$ 与 $|X|$ 是否相互独立?为什么?

## (试卷 Ⅱ)

**一、(本题满分 15 分)**【同试卷 Ⅰ　第一题】

**二、(本题满分 15 分)**【同试卷 Ⅰ　第二题】

**三、(本题满分 15 分)**【同试卷 Ⅰ　第三题】

**四、(本题共 3 小题,每小题 6 分,满分 18 分)**

(1) 设 $z = x^3 f\left(xy, \frac{y}{x}\right)$, $f$ 具有连续二阶偏导数,求 $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

(2)【同试卷 Ⅰ　第四题】

(3) 已知 $\mathbf{R}^3$ 的两个基为

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \text{与} \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix},$$

求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$.

**五、(本题满分 7 分)**【同试卷 Ⅰ　第五题】

**六、(本题满分 10 分)**【同试卷 Ⅰ　第六题】

**七、(本题满分 8 分)**【同试卷 Ⅰ　第七题】

**八、(本题满分 6 分)**【同试卷 Ⅰ　第八题】

**九、(本题满分 6 分)**【同试卷 Ⅰ　第九题】

# 1994 年全国硕士研究生招生考试试题

## (试卷 Ⅰ)

### 一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$ ______.

(2) 曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在点$(1,2,0)$处的切平面方程为______.

(3) 设 $u=e^{-x}\sin\dfrac{x}{y}$,则$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$在点$\left(2,\dfrac{1}{\pi}\right)$处的值为______.

(4) 设区域 $D$ 为 $x^2+y^2\leqslant R^2$,则$\iint\limits_D\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)dxdy=$ ______.

(5) 已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)$, $\boldsymbol{\beta}=\left(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)$,设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$,其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置,则 $\boldsymbol{A}^n=$ ______.

### 二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x\,dx$, $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)\,dx$, $P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)\,dx$,则有(　　)

(A) $N<P<M$.　　(B) $M<P<N$.

(C) $N<M<P$.　　(D) $P<M<N$.

(2) 二元函数 $f(x,y)$ 在点$(x_0,y_0)$处两个偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$, $f_y'(x_0,y_0)$ 存在是 $f(x,y)$ 在该点连续的(　　)

(A) 充分条件而非必要条件.　　(B) 必要条件而非充分条件.

(C) 充分必要条件.　　(D) 既非充分条件又非必要条件.

(3) 设常数 $\lambda>0$,且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$(　　)

(A) 发散.　　(B) 条件收敛.

(C) 绝对收敛.　　(D) 收敛性与 $\lambda$ 有关.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$,其中 $a^2+c^2\neq 0$,则必有(　　)

(A) $b=4d$.　　(B) $b=-4d$.

(C) $a=4c$.　　(D) $a=-4c$.

(5) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,则向量组(　　)

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

**三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)**

(1) 设$\begin{cases} x = \cos(t^2), \\ y = t\cos(t^2) - \displaystyle\int_1^{t^2} \frac{1}{2\sqrt{u}}\cos u\,\mathrm{d}u, \end{cases}$ 求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$在 $t = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ 的值.

(2) 将函数 $f(x) = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x} + \dfrac{1}{2}\arctan x - x$ 展开成 $x$ 的幂级数.

(3) 求$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x + 2\sin x}$.

**四、(本题满分 6 分)**

计算曲面积分$\displaystyle\iint\limits_S \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$,其中 $S$ 是由曲面 $x^2 + y^2 = R^2$ 及两平面$z = R, z = -R(R > 0)$ 所围成立体表面的外侧.

**五、(本题满分 9 分)**

设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, $f(0) = 0, f'(0) = 1$,且$[xy(x+y) - f(x)y]\mathrm{d}x + [f'(x) + x^2 y]\mathrm{d}y = 0$ 为一全微分方程,求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解.

**六、(本题满分 8 分)**

设 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 的某一邻域内具有二阶连续导数,且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 0$,证明级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收 .

**七、(本题满分 6 分)**

已知点 $A$ 与点 $B$ 的直角坐标分别为$(1,0,0)$ 与$(0,1,1)$,线段 $AB$ 绕 $z$ 轴旋转一周所成的旋转曲面为 $S$,求由 $S$ 及两平面 $z = 0, z = 1$ 所围成的立体体积.

**八、(本题满分 8 分)**

设四元齐次线性方程组(Ⅰ) 为$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$又已知某齐次线性方程组(Ⅱ) 的通解为 $k_1(0,1,1,0) + k_2(-1,2,2,1)$.

(1) 求线性方程组(Ⅰ)的基础解系;

(2) 问线性方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)是否有非零公共解?若有,则求出所有的非零公共解. 若没有,则说明理由.

**九、(本题满分 6 分)**

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶非零方阵,$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵,当 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 时,证明 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

**十、填空题(本题共2小题,每小题3分,满分6分)**

(1) 已知$A,B$两个事件满足条件$P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$,且$P(A)=p$,则$P(B)=$______.

(2) 设相互独立的两个随机变量$X,Y$具有同一分布律,且$X$的分布律为

| $X$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $p$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

则随机变量$Z=\max\{X,Y\}$的分布律为______.

**十一、(本题满分6分)**

已知随机变量$(X,Y)$服从二维正态分布,并且$X$和$Y$分别服从正态分布$N(1,3^2)$和$N(0,4^2)$,$X$与$Y$的相关系数$\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$,设$Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$,

(1) 求$Z$的数学期望$E(Z)$和方差$D(Z)$;

(2) 求$X$与$Z$的相关系数$\rho_{XZ}$;

(3) 问$X$与$Z$是否相互独立?为什么?

## (试卷 Ⅱ)

**一、(本题满分15分)**【同试卷 Ⅰ 第一题】

**二、(本题满分15分)**【同试卷 Ⅰ 第二题】

**三、(本题满分15分)**【同试卷 Ⅰ 第三题】

**四、(本题共2小题,每小题6分,满分12分)**

(1) 在椭圆$x^2+4y^2=4$上求一点,使其到直线$2x+3y-6=0$的距离最短.

(2)【同试卷 Ⅰ 第四题】

**五、(本题满分9分)**【同试卷 Ⅰ 第五题】

**六、(本题满分8分)**【同试卷 Ⅰ 第六题】

**七、(本题满分6分)**【同试卷 Ⅰ 第七题】

**八、(本题共2小题,满分14分)**

(1) (本题满分6分) 设$\boldsymbol{A}$是$n$阶方阵,$2,4,\cdots,2n$是$\boldsymbol{A}$的$n$个特征值,$\boldsymbol{E}$是$n$阶单位阵,计算行列式$|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|$的值.

(2)(本题满分8分)【同试卷 Ⅰ 第八题】

**九、(本题满分6分)**【同试卷 Ⅰ 第九题】

# 1995 年全国硕士研究生招生考试试题

## (试卷 Ⅰ)

**一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)**

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$ ______.

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{x^2}^{0}x\cos(t^2)\,\mathrm{d}t=$ ______.

(3) 设$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$,则$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=$ ______.

(4) 幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}$ 的收敛半径 $R=$ ______.

(5) 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$,其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{7}\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{B}=$ ______.

**二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)**

(1) 设有直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0,\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 及平面 $\pi:4x-2y+z-2=0$,则直线 $L$(　　)

(A) 平行于 $\pi$.　　(B) 在 $\pi$ 上.

(C) 垂直于 $\pi$.　　(D) 与 $\pi$ 斜交.

(2) 设在$[0,1]$上 $f''(x)>0$,则 $f'(0),f'(1),f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是(　　)

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$.

(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$.

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$.

(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$.

(3) 设 $f(x)$ 可导,$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$,则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的(　　)

(A) 充分必要条件.

(B) 充分条件但非必要条件.

(C) 必要条件但非充分条件.

(D) 既非充分条件又非必要条件.

(4) 设 $u_n=(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$,则级数(　　)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都收敛.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都发散.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散.　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛.

(5) 设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}+a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{pmatrix},$$

$$P_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},$$

则必有(　　)

(A) $AP_1P_2=B$.　　(B) $AP_2P_1=B$.

(C) $P_1P_2A=B$.　　(D) $P_2P_1A=B$.

**三、(本题共 2 小题,每小题 5 分,满分 10 分)**

(1) 设 $u=f(x,y,z)$,$\varphi(x^2,e^y,z)=0$,$y=\sin x$,其中 $f,\varphi$ 都具有一阶连续偏导数,且 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$,求 $\dfrac{du}{dx}$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续,并设 $\int_0^1 f(x)dx=A$,求 $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy$.

**四、(本题共 2 小题,每小题 6 分,满分 12 分)**

(1) 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S$,其中 $\Sigma$ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱体 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 内的部分.

(2) 将函数 $f(x)=x-1\,(0\leqslant x\leqslant 2)$ 展开成周期为 4 的余弦级数.

**五、(本题满分 7 分)**

设曲线 $L$ 位于 $xOy$ 平面的第一象限内,$L$ 上任一点 $M$ 处的切线与 $y$ 轴总相交,交点记为 $A$. 已知 $|\overline{MA}|=|\overline{OA}|$,且 $L$ 过点 $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$,求 $L$ 的方程.

**六、(本题满分 8 分)**

设函数 $Q(x,y)$ 在 $xOy$ 平面上具有一阶连续偏导数,曲线积分 $\int_L 2xy\,dx+Q(x,y)dy$ 与路径无关,并且对任意 $t$ 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\,dx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\,dx+Q(x,y)dy,$$

求 $Q(x,y)$.

**七、(本题满分 8 分)**

函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数,并且 $g''(x)\neq 0$,$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$,试证:

(1) 在开区间 $(a,b)$ 内 $g(x)\neq 0$;

(2) 在开区间 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$,使 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

**八、(本题满分 7 分)**

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$,对应于 $\lambda_1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{A}$.

**九、(本题满分 6 分)**

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶矩阵,满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$($\boldsymbol{E}$ 是 $n$ 阶单位矩阵,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵),$|\boldsymbol{A}|<0$,求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

**十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分)**

(1) 设 $X$ 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数,每次射中目标的概率为 0.4,则 $X^2$ 的数学期望 $E(X^2)=$ ______.

(2) 设 $X$ 和 $Y$ 为两个随机变量,且

$$P\{X\geqslant 0,Y\geqslant 0\}=\frac{3}{7},\ P\{X\geqslant 0\}=P\{Y\geqslant 0\}=\frac{4}{7},$$

则 $P\{\max(X,Y)\geqslant 0\}=$ ______.

**十一、(本题满分 6 分)**

设随机变量 $X$ 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ 求随机变量 $Y=\mathrm{e}^X$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

## (试卷 Ⅱ)

**一、(本题满分 15 分)**【同试卷 Ⅰ　第一题】

**二、(本题满分 15 分)**【同试卷 Ⅰ　第二题】

**三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)**

(1)【同试卷 Ⅰ　第三、(1) 题】

(2) 求曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程.

(3) 计算二重积分 $\iint\limits_D x^2y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D$ 是由双曲线 $x^2-y^2=1$ 及直线 $y=0,y=1$ 所围成的平面区域.

**四、(本题满分 12 分)**【同试卷 Ⅰ　第四题】

**五、(本题满分 7 分)**【同试卷 Ⅰ　第五题】

**六、(本题满分 8 分)**【同试卷 Ⅰ　第六题】

**七、(本题满分 8 分)**【同试卷 Ⅰ　第七题】

**八、(本题共 2 小题,每小题 7 分,满分 14 分)**

(1) 设

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 + ax_3 - ax_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 3, \end{cases}$$

问 $a$ 为何值时方程组有解,并在有解时求出方程组的通解.

(2)【同试卷 Ⅰ　第八题】

**九、(本题满分 6 分)**【同试卷 Ⅰ　第九题】

# 1996 年全国硕士研究生招生考试试题

## (试卷 Ⅰ)

**一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)**

(1) 设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^{x}=8$,则 $a=$______.

(2) 设一平面经过原点及点$(6,-3,2)$,且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直,则此平面方程为______.

(3) 微分方程 $y''-2y'+2y=\mathrm{e}^{x}$ 的通解为______.

(4) 函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^{2}+z^{2}})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿点 $A$ 指向点 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数为______.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $4\times3$ 矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$,而 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$,则 $r(\boldsymbol{AB})=$______.

**二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)**

(1) 已知$\dfrac{(x+ay)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^{2}}$为某函数的全微分,则 $a$ 等于(　　)

(A) $-1$.　　(B)0.　　(C)1.　　(D)2.

(2) 设$f(x)$有二阶连续导数,且$f'(0)=0,\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$,则(　　)

(A)$f(0)$是$f(x)$的极大值.

(B)$f(0)$是$f(x)$的极小值.

(C)$(0,f(0))$是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D)$f(0)$不是$f(x)$的极值,$(0,f(0))$也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(3) 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$,且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,常数 $\lambda\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(n\tan\dfrac{\lambda}{n}\right)a_{2n}$(　　)

(A) 绝对收敛.　　(B) 条件收敛.　　(C) 发散.　　(D) 敛散性与 $\lambda$ 有关.

(4) 设$f(x)$有连续导数,$f(0)=0,f'(0)\neq0,F(x)=\int_{0}^{x}(x^{2}-t^{2})f(t)\mathrm{d}t$,且当 $x\to0$ 时,$F'(x)$与 $x^{k}$ 是同阶无穷小,则 $k$ 等于(　　)

(A)1.　　(B)2.　　(C)3.　　(D)4.

(5) 四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于(　　)

(A) $a_1a_2a_3a_4 - b_1b_2b_3b_4$.　　(B) $a_1a_2a_3a_4 + b_1b_2b_3b_4$.

(C) $(a_1a_2 - b_1b_2)(a_3a_4 - b_3b_4)$.　　(D) $(a_2a_3 - b_2b_3)(a_1a_4 - b_1b_4)$.

**三、(本题共 2 小题,每小题 5 分,满分 10 分)**

(1) 求心形线 $r = a(1 + \cos\theta)$ 的全长,其中 $a > 0$ 是常数.

(2) 设 $x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}\,(n = 1,2,\cdots)$,试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在,并求此极限.

**四、(本题共 2 小题,每小题 6 分,满分 12 分)**

(1) 计算曲面积分 $\iint\limits_S (2x + z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $S$ 为有向曲面 $z = x^2 + y^2\,(0 \leqslant z \leqslant 1)$,其法向量与 $z$ 轴正向的夹角为锐角.

(2) 设变换 $\begin{cases} u = x - 2y, \\ v = x + ay \end{cases}$ 可把方程 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 简化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$,求常数 $a$.(这里应假设 $z$ 有二阶连续偏导数.)

**五、(本题满分 7 分)**

求级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(n^2 - 1)2^n}$ 的和.

**六、(本题满分 7 分)**

设对任意 $x > 0$,曲线 $y = f(x)$ 上点 $(x, f(x))$ 处的切线在 $y$ 轴上的截距等于 $\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,求 $f(x)$ 的一般表达式.

**七、(本题满分 8 分)**

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数,且满足条件 $|f(x)| \leqslant a$, $|f''(x)| \leqslant b$,其中 $a,b$ 都是非负常数,$c$ 是 $(0,1)$ 内任意一点.

(1) 写出 $f(x)$ 在点 $x = c$ 处带拉格朗日型余项的一阶泰勒公式;

(2) 证明 $|f'(x)| \leqslant 2a + \dfrac{b}{2}$.

**八、(本题满分 6 分)**

设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 是 $n$ 阶单位矩阵,$\boldsymbol{\xi}$ 是 $n$ 维非零列向量,$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\xi}$ 的转置. 证明:

(1) $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi} = 1$;

(2) 当 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 是不可逆矩阵.

**九、(本题满分 8 分)**

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2.

(1) 求参数 $c$ 及此二次型对应矩阵的特征值;

(2) 指出方程 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种二次曲面.

**十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分)**

(1) 设工厂 A 和工厂 B 的产品的次品率分别为 1% 和 2%,现从由 A 厂和 B 厂的产品分别占 60% 和 40% 的一批产品中随机抽取一件,发现是次品,则该次品是 A 厂生产的概率是______.

(2) 设 $\xi,\eta$ 是两个相互独立且均服从正态分布 $N\left(0,\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)$ 的随机变量,则随机变量 $|\xi-\eta|$ 的数学期望 $E(|\xi-\eta|)=$______.

**十一、(本题满分 6 分)**

设 $\xi,\eta$ 是相互独立且服从同一分布的两个随机变量,已知 $\xi$ 的分布律为 $P\{\xi=i\}=\frac{1}{3},i=1,2,3$,又设 $X=\max\{\xi,\eta\},Y=\min\{\xi,\eta\}$.

(1) 写出二维随机变量 $(X,Y)$ 的分布律;

| $Y$ \ $X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |

(2) 求随机变量 $X$ 的数学期望 $E(X)$.

## (试卷 Ⅱ)

**一、(本题满分 15 分)**【同试卷 Ⅰ 第一题】

**二、(本题满分 15 分)**【同试卷 Ⅰ 第二题】

**三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)**

(1) 计算积分 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant x,x^2+y^2\leqslant 2x\}$.

(2)【同试卷 Ⅰ 第三、(1) 题】

(3)【同试卷 Ⅰ　第三、(2) 题】

**四、(本题满分 12 分)**【同试卷 Ⅰ　第四题】

**五、(本题满分 7 分)**【同试卷 Ⅰ　第五题】

**六、(本题满分 7 分)**【同试卷 Ⅰ　第六题】

**七、(本题满分 8 分)**【同试卷 Ⅰ　第七题】

**八、(本题共 2 小题,每小题 6 分,满分 12 分)**

(1) 求齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$的基础解系.

(2)【同试卷 Ⅰ　第八题】

**九、(本题满分 9 分)**【同试卷 Ⅰ　第九题】

# 1997 年全国硕士研究生招生考试试题

## 一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$______.

(2) 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 3,则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为______.

(3) 对数螺线 $\rho=e^{\theta}$ 在点 $(\rho,\theta)=\left(e^{\frac{\pi}{2}},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程为______.

(4) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}$ 为 3 阶非零矩阵,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则 $t=$______.

(5) 袋中有 50 个乒乓球,其中 20 个是黄球,30 个是白球. 今有两人依次随机地从袋中各取一球,取后不放回,则第二人取得黄球的概率是______.

## 二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处(　　)

(A) 连续,偏导数存在.　　(B) 连续,偏导数不存在.

(C) 不连续,偏导数存在.　　(D) 不连续,偏导数不存在.

(2) 设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)>0$, $f'(x)<0$, $f''(x)>0$. 令 $S_1=\int_a^b f(x)\,dx$, $S_2=f(b)(b-a)$, $S_3=\dfrac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$,则(　　)

(A) $S_1<S_2<S_3$.　　(B) $S_2<S_1<S_3$.

(C) $S_3<S_1<S_2$.　　(D) $S_2<S_3<S_1$.

(3) 设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt$,则 $F(x)$(　　)

(A) 为正常数.　　(B) 为负常数.

(C) 恒为零.　　(D) 不为常数.

(4) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$,则三条直线 $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$, $a_3x+b_3y+c_3=0$(其中 $a_i^2+b_i^2\neq0, i=1,2,3$)交于一点的充要条件是(　　)

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(C) 秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=$ 秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

(5) 设两个相互独立的随机变量 $X$ 和 $Y$ 的方差分别为 4 和 2,则随机变量 $3X-2Y$ 的方差是(　　)

(A)8.　　(B)16.　　(C)28.　　(D)44.

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1) 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$,其中 $\Omega$ 为平面曲线 $\begin{cases} y^2=2z, \\ x=0 \end{cases}$ 绕 $z$ 轴旋转一周形成的曲面与平面 $z=8$ 所围成的区域.

(2) 计算曲线积分 $\oint_C (z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$,其中 $C$ 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x-y+z=2, \end{cases}$ 从 $z$ 轴正向往 $z$ 轴负向看,$C$ 的方向是顺时针的.

(3) 在某一人群中推广新技术是通过其中已掌握新技术的人进行的. 设该人群的总人数为 $N$,在 $t=0$ 时刻已掌握新技术的人数为 $x_0$,在任意时刻 $t$ 已掌握新技术的人数为 $x(t)$(将 $x(t)$ 视为连续可微变量),其变化率与已掌握新技术人数和未掌握新技术人数之积成正比,比例常数 $k>0$,求 $x(t)$.

四、(本题共 2 小题,第(1) 小题 6 分,第(2) 小题 7 分,满分 13 分)

(1) 设直线 $l:\begin{cases} x+y+b=0, \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$ 在平面 $\pi$ 上,而平面 $\pi$ 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点 $(1,-2,5)$,求 $a,b$ 之值.

(2) 设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数,而 $z=f(\mathrm{e}^x\sin y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{2x}z$,求 $f(u)$.

五、(本题满分 6 分)

设 $f(x)$ 连续,$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$($A$ 为常数),求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

六、(本题满分 8 分)

设 $a_1=2,a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)(n=1,2,\cdots)$,证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在;

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛.

七、(本题共 2 小题,第(1) 小题 5 分,第(2) 小题 6 分,满分 11 分)

(1) 设 $\boldsymbol{B}$ 是秩为 2 的 $5\times 4$ 矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,4,-1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(5,-1,-8,9)^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解向量,求 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的一个标准正交基.

(2) 已知 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量.

(Ⅰ) 试确定参数 $a,b$ 及特征向量 $\boldsymbol{\xi}$ 所对应的特征值;

（Ⅱ）问 $\boldsymbol{A}$ 能否相似于对角阵?说明理由.

**八、(本题满分 5 分)**

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶可逆方阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 行和第 $j$ 行对换后得到的矩阵记为 $\boldsymbol{B}$.

(1) 证明 $\boldsymbol{B}$ 可逆;

(2) 求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}$.

**九、(本题满分 7 分)**

从学校乘汽车到火车站的途中有 3 个交通岗,假设在各个交通岗遇到红灯的事件是相互独立的,并且概率都是$\dfrac{2}{5}$. 设 $X$ 为途中遇到红灯的次数,求随机变量 $X$ 的分布律、分布函数和数学期望.

**十、(本题满分 5 分)**

设总体 $X$ 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $\theta > \ 1$ 是未知参数,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X$ 的一个容量为 $n$ 的简单随机样本,分别用矩估计法和极大似然估计法求 $\theta$ 的估计量.

# 1998 年全国硕士研究生招生考试试题

## 一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$ ______.

(2) 设 $z=\dfrac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$, $f,\varphi$ 具有二阶连续导数,则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ______.

(3) 设 $l$ 为椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$,其周长记为 $a$,则$\oint_l(2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=$ ______.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶矩阵, $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为 $n$ 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda$,则 $(\boldsymbol{A}^*)^2+\boldsymbol{E}$ 必有特征值______.

(5) 设平面区域 $D$ 由曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 及直线 $y=0,x=1,x=\mathrm{e}^2$ 所围成,二维随机变量$(X,Y)$ 在区域 $D$ 上服从均匀分布,则$(X,Y)$ 关于 $X$ 的边缘概率密度在 $x=2$ 处的值为______.

## 二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $f(x)$ 连续,则$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=$ (　　)

(A) $xf(x^2)$.　　(B) $-xf(x^2)$.　　(C) $2xf(x^2)$.　　(D) $-2xf(x^2)$.

(2) 函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 不可导点的个数是(　　)

(A) 3.　　(B) 2.　　(C) 1.　　(D) 0.

(3) 已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 $x$ 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$,且当 $\Delta x\to 0$ 时, $\alpha$ 是 $\Delta x$ 的高阶无穷小, $y(0)=\pi$,则 $y(1)$ 等于(　　)

(A) $2\pi$.　　(B) $\pi$.　　(C) $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$.　　(D) $\pi\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$.

(4) 设矩阵$\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}$是满秩的,则直线$\dfrac{x-a_3}{a_1-a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_1-b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_1-c_2}$与直线$\dfrac{x-a_1}{a_2-a_3}=\dfrac{y-b_1}{b_2-b_3}=\dfrac{z-c_1}{c_2-c_3}$(　　)

(A) 相交于一点.　　(B) 重合.　　(C) 平行但不重合.　　(D) 异面.

(5) 设 $A,B$ 是两个随机事件,且 $0<P(A)<1$, $P(B)>0$, $P(B|A)=P(B|\overline{A})$,则必有(　　)

(A) $P(A|B)=P(\overline{A}|B)$.　　(B) $P(A|B)\neq P(\overline{A}|B)$.

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$.　　(D) $P(AB)\neq P(A)P(B)$.

## 三、(本题满分 5 分)

求直线 $l:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi:x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 $l_0$ 的方程,并求 $l_0$ 绕 $y$ 轴旋转一周所成曲面的方程.

**四、(本题满分 6 分)**

确定常数 $\lambda$,使在右半平面 $x>0$ 上的向量 $\boldsymbol{A}(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{i}-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{j}$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度,并求 $u(x,y)$.

**五、(本题满分 6 分)**

从船上向海中沉放某种探测器,按探测要求,需确定仪器的下沉深度 $y$(从海平面算起)与下沉速度 $v$ 之间的函数关系. 设仪器在重力作用下,从海平面由静止开始铅直下沉,在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用. 设仪器的质量为 $m$,体积为 $B$,海水比重为 $\rho$,仪器所受的阻力与下沉速度成正比,比例系数为 $k(k>0)$. 试建立 $y$ 与 $v$ 所满足的微分方程,并求出函数关系式 $y=y(v)$.

**六、(本题满分 7 分)**

计算 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$,其中 $\Sigma$ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧,$a$ 为大于零的常数.

**七、(本题满分 6 分)**

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

**八、(本题满分 5 分)**

设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散,试问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{a_n+1}\right)^n$ 是否收敛?并说明理由.

**九、(本题满分 6 分)**

设 $y=f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的任一非负连续函数.

(1) 试证存在 $x_0\in(0,1)$,使得在区间 $[0,x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积,等于在区间 $[x_0,1]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边的梯形面积.

(2) 又设 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内可导,且 $f'(x)>-\dfrac{2f(x)}{x}$,证明(1)中的 $x_0$ 是唯一的.

**十、(本题满分 6 分)**

已知二次曲面方程 $x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$ 可以经过正交变换

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}$$

化为椭圆柱面方程 $\eta^2+4\zeta^2=4$,求 $a,b$ 的值和正交矩阵 $\boldsymbol{P}$.

**十一、(本题满分 4 分)**

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶矩阵,若存在正整数 $k$,使线性方程组 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有解向量 $\boldsymbol{\alpha}$,且 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$. 证明:向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 是线性无关的.

**十二、(本题满分 5 分)**

已知线性方程组

$$(\mathrm{I})\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,2n}x_{2n} = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,2n}x_{2n} = 0, \\ \qquad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{n,2n}x_{2n} = 0 \end{cases}$$

的一个基础解系为$(b_{11},b_{12},\cdots,b_{1,2n})^{\mathrm{T}},(b_{21},b_{22},\cdots,b_{2,2n})^{\mathrm{T}},\cdots,(b_{n1},b_{n2},\cdots,b_{n,2n})^{\mathrm{T}}$. 试写出线性方程组

$$(\mathrm{II})\begin{cases} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1,2n}y_{2n} = 0, \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2,2n}y_{2n} = 0, \\ \qquad \cdots\cdots \\ b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{n,2n}y_{2n} = 0 \end{cases}$$

的通解,并说明理由.

**十三、(本题满分 6 分)**

设两个随机变量 $X,Y$ 相互独立,且都服从均值为 0,方差为$\dfrac{1}{2}$的正态分布,求随机变量 $|X-Y|$ 的方差.

**十四、(本题满分 4 分)**

从正态总体 $N(3.4,6^2)$ 中抽取容量为 $n$ 的样本,如果要求其样本均值位于区间$(1.4,5.4)$内的概率不小于 0.95,问样本容量 $n$ 至少应取多大?

附表:标准正态分布表 $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

| $z$ | 1.28 | 1.645 | 1.96 | 2.33 |
|---|---|---|---|---|
| $\Phi(z)$ | 0.900 | 0.950 | 0.975 | 0.990 |

**十五、(本题满分 4 分)**

设某次考试的考生成绩服从正态分布,从中随机地抽取36位考生的成绩,算得平均成绩为66.5分,标准差为 15 分. 问在显著性水平 0.05 下,是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分?并给出检验过程.

附表:$t$ 分布表 $P\{t(n) \leqslant t_p(n)\} = p$

| $n$ \ $t_p(n)$ \ $p$ | 0.95 | .975 |
|---|---|---|
| 35 | .6896 | 2.0301 |
| 36 | 1.6883 | .0281 |

# 1999 年全国硕士研究生招生考试试题

## 一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=$ ______.

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sin(x-t)^2\mathrm{d}t=$ ______.

(3) $y''-4y=\mathrm{e}^{2x}$ 的通解为 $y=$ ______.

(4) 设 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素全为 1,则 $\boldsymbol{A}$ 的 $n$ 个特征值是______.

(5) 设两两相互独立的三事件 $A,B$ 和 $C$ 满足条件:$ABC=\varnothing$,$P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$,且已知

$P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$,则 $P(A)=$ ______.

## 二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $f(x)$ 是连续函数,$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则(　　)

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时,$F(x)$ 必是偶函数.

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时,$F(x)$ 必是奇函数.

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时,$F(x)$ 必是周期函数.

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时,$F(x)$ 必是单调增函数.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0,\\ x^2g(x), & x\leqslant 0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　)

(A) 极限不存在.　　(B) 极限存在,但不连续.

(C) 连续,但不可导.　　(D) 可导.

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ 2-2x, & \frac{1}{2}<x<1,\end{cases}$ $S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x,\ -\infty<x<+\infty$,其中

$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x,(n=0,1,2,\cdots)$,则 $S\left(-\frac{5}{2}\right)$等于(　　)

(A) $\frac{1}{2}$.　　(B) $-\frac{1}{2}$.　　(C) $\frac{3}{4}$.　　(D) $-\frac{3}{4}$.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵,则(　　)

(A) 当 $m>n$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$.

(B) 当 $m>n$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|=0$.

(C) 当 $n>m$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$.

(D) 当 $n>m$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|=0$.

(5) 设两个相互独立的随机变量 $X$ 和 $Y$ 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$,则(　　)

(A) $P\{X+Y\leqslant 0\}=\frac{1}{2}$.　　(B) $P\{X+Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$.

(C) $P\{X-Y\leqslant 0\}=\frac{1}{2}$.　　(D) $P\{X-Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$.

**三、(本题满分 5 分)**

设 $y=y(x)$,$z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数,其中 $f$ 和 $F$ 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数,求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

**四、(本题满分 5 分)**

求 $I=\int_L[\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y)]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y$,其中 $a,b$ 为正的常数,$L$ 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧.

**五、(本题满分 6 分)**

设函数 $y(x)(x\geqslant 0)$ 二阶可导且 $y'(x)>0$,$y(0)=1$. 过曲线 $y=y(x)$ 上任意一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 $x$ 轴的垂线,上述两直线与 $x$ 轴所围成的三角形的面积记为 $S_1$,区间 $[0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 $S_2$,并设 $2S_1-S_2$ 恒为 1,求此曲线 $y=y(x)$ 的方程.

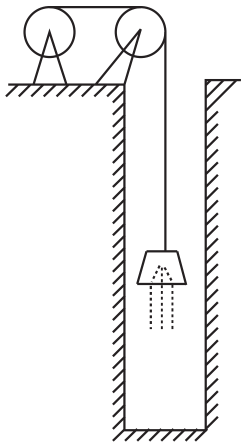
**六、(本题满分 6 分)**

试证:当 $x>0$ 时,$(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$.

**七、(本题满分 6 分)**

为清除井底的污泥,用缆绳将抓斗放入井底,抓起污泥后提出井口. 已知井深 30m,抓斗自重 400N,缆绳每米重 50N,抓斗抓起的污泥重 2000N,提升速度为 3m/s,在提升过程中,污泥以 20N/s 的速率从抓斗缝隙中漏掉. 现将抓起污泥的抓斗提升至井口,问克服重力需作多少焦耳的功?

(说明:①1N × 1m = 1J;m,N,s,J 分别表示米,牛顿,秒,焦耳. ② 抓斗的高度及位于井口上方的缆绳长度忽略不计.)



**八、(本题满分 7 分)**

设 $S$ 为椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分,点 $P(x,y,z)\in S$,$\pi$ 为 $S$ 在点 $P$ 处的切平面,$\rho(x,y,z)$ 为点 $O(0,0,0)$ 到平面 $\pi$ 的距离,求 $\iint\limits_S\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$.

**九、(本题满分 7 分)**

设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$,

(1) 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$ 的值;

(2) 试证:对任意的常数 $\lambda>0$,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛.

**十、(本题满分 8 分)**

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$,其行列式 $|\boldsymbol{A}|=-1$,又 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 有一个特征值 $\lambda_0$,属于 $\lambda_0$ 的一个特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$,求 $a,b,c$ 和 $\lambda_0$ 的值.

**十一、(本题满分 6 分)**

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m$ 阶实对称矩阵且正定,$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 实矩阵,$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的转置矩阵,试证:$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{B}$ 的秩 $r(\boldsymbol{B})=n$.

**十二、(本题满分 8 分)**

设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立,下表列出了二维随机变量 $(X,Y)$ 的联合分布律及关于 $X$ 和关于 $Y$ 的边缘分布律中的部分数值,试将其余数值填入表中的空白处.

| $X \backslash Y$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | | $\frac{1}{8}$ | | |
| $x_2$ | $\frac{1}{8}$ | | | |
| $P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}$ | $\frac{1}{6}$ | | | 1 |

**十三、(本题满分 6 分)**

设总体 $X$ 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 $X$ 的简单随机样本.

(1) 求 $\theta$ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;

(2) 求 $\hat{\theta}$ 的方差 $D(\hat{\theta})$.

# 2000 年全国硕士研究生招生考试试题

## 一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\int_0^1 \sqrt{2x - x^2}\mathrm{d}x =$ ______.

(2) 曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 在点 $(1, -2, 2)$ 处的法线方程为______.

(3) 微分方程 $xy'' + 3y' = 0$ 的通解为______.

(4) 已知方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 无解,则 $a =$ ______.

(5) 设两个相互独立的事件 $A$ 和 $B$ 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$,$A$ 发生 $B$ 不发生的概率与 $B$ 发生 $A$ 不发生的概率相等,则 $P(A) =$ ______.

## 二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $f(x), g(x)$ 是恒大于零的可导函数,且 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$,则当 $a < x < b$ 时,有(　　)

(A) $f(x)g(b) > f(b)g(x)$.　　(B) $f(x)g(a) > f(a)g(x)$.

(C) $f(x)g(x) > f(b)g(b)$.　　(D) $f(x)g(x) > f(a)g(a)$.

(2) 设 $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geqslant 0)$,$S_1$ 为 $S$ 在第一卦限中的部分,则有(　　)

(A) $\iint\limits_S x\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{S_1} x\mathrm{d}S$.　　(B) $\iint\limits_S y\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{S_1} x\mathrm{d}S$.

(C) $\iint\limits_S z\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{S_1} x\mathrm{d}S$.　　(D) $\iint\limits_S xyz\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{S_1} xyz\mathrm{d}S$.

(3) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则必收敛的级数为(　　)

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$.　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$.　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$.

(4) 设 $n$ 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m < n)$ 线性无关,则 $n$ 维列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充分必要条件为(　　)

(A) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性表示.

(B) 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

(C) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 等价.

(D) 矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$ 与矩阵 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m)$ 等价.

(5) 设二维随机变量 $(X, Y)$ 服从二维正态分布,则随机变量 $\xi = X + Y$ 与 $\eta = X - Y$ 不相关的充分必要条件为(　　)

(A) $E(X) = E(Y)$.　　(B) $E(X^2) - [E(X)]^2 = E(Y^2) - [E(Y)]^2$.

(C) $E(X^2) = E(Y^2)$.　　(D) $E(X^2) + [E(X)]^2 = E(Y^2) + [E(Y)]^2$.

**三、(本题满分 5 分)**

求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

**四、(本题满分 5 分)**

设 $z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$,其中 $f$ 具有二阶连续偏导数,$g$ 具有二阶连续导数,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

**五、(本题满分 6 分)**

计算曲线积分 $I=\oint_L\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$,其中 $L$ 是以点(1,0)为中心,$R$ 为半径的圆周($R>1$),取逆时针方向.

**六、(本题满分 7 分)**

设对于半空间 $x>0$ 内任意的光滑有向封闭曲面 $S$,都有

$$\oiint\limits_S xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-e^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

其中函数 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$内具有连续的一阶导数,且$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$. 求 $f(x)$.

**七、(本题满分 6 分)**

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n+(-2)^n}\dfrac{x^n}{n}$ 的收敛区间,并讨论该区间端点处的收敛性.

**八、(本题满分 7 分)**

设有一半径为 $R$ 的球体,$P_0$ 是此球的表面上的一个定点,球体上任一点的密度与该点到 $P_0$ 距离的平方成正比(比例常数 $k>0$),求球体的重心位置.

**九、(本题满分 6 分)**

设函数 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上连续,且$\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$,$\int_0^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$. 试证:在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点 $\xi_1,\xi_2$,使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

**十、(本题满分 6 分)**

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$,且 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 4 阶单位矩阵,求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

十一、(本题满分 8 分)

某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计,然后将$\frac{1}{6}$熟练工支援其他生产部门,其缺额由招收新的非熟练工补齐. 新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有$\frac{2}{5}$成为熟练工. 设第 $n$ 年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 $x_n$ 和 $y_n$,记成向量$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

(1) 求$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$的关系式并写成矩阵形式:$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$;

(2) 验证 $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$是 $\boldsymbol{A}$ 的两个线性无关的特征向量,并求出相应的特征值;

(3) 当$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$时,求$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$.

十二、(本题满分 8 分)

某流水生产线上每个产品不合格的概率为 $p(0 < p < 1)$,各产品合格与否相互独立,当出现一个不合格产品时即停机检修. 设开机后第一次停机时已生产了的产品个数为 $X$. 求 $X$ 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$.

十三、(本题满分 6 分)

设某种元件的使用寿命 $X$ 的概率密度为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)}, & x \geqslant \theta, \\ 0, & x < \theta, \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参 . 又设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 $X$ 的一组样本观测值,求参数 $\theta$ 的最大似然估计值.

# 2001 年全国硕士研究生招生考试试题

## 一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $y = e^x(C_1\sin x + C_2\cos x)$($C_1, C_2$ 为任意常数)为某二阶常系数齐次线性微分方程的通解,则该方程为______.

(2) 设 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,则 $\operatorname{div}(\mathbf{grad}\, r)\big|_{(1,-2,2)} =$ ______.

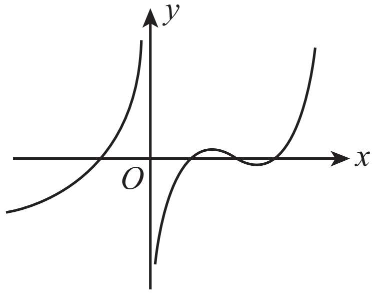
(3) 交换二次积分的积分次序:$\int_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int_{2}^{1-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x =$ ______.

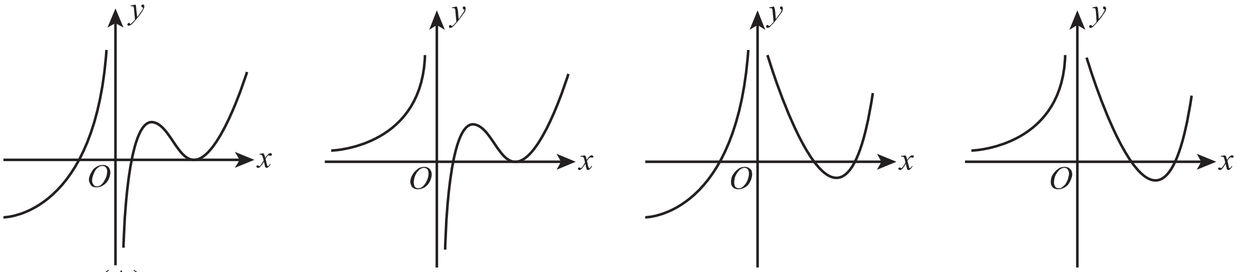
(4) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵,则 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})^{-1} =$ ______.

(5) 设随机变量 $X$ 的方差为 2,则根据切比雪夫不等式有估计 $P\{|X - E(X)| \geqslant 2\} \leqslant$ ______.

## 二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导,$y = f(x)$ 的图形如右图所示,则导函数 $y = f'(x)$ 的图形为(　　)




(A)　(B)　(C)　(D)

(2) 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近有定义,且 $f'_x(0,0) = 3$, $f'_y(0,0) = 1$,则(　　)

(A) $\mathrm{d}z\big|_{(0,0)} = 3\mathrm{d}x + \mathrm{d}y$.

(B) 曲面 $z = f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量为 $(3,1,1)$.

(C) 曲线 $\begin{cases} z = f(x,y), \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $(1,0,3)$.

(D) 曲线 $\begin{cases} z = f(x,y), \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $(3,0,1)$.

(3) 设 $f(0) = 0$,则 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 可导的充要条件为(　　)

(A) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h^2} f(1 - \cos h)$ 存在.

(B) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h} f(1 - e^h)$ 存在.

(C) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h^2} f(h - \sin h)$ 存在.

(D) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}[f(2h) - f(h)]$ 存在.

(4) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$(　　)

(A) 合同且相似.　　(B) 合同但不相似.

(C) 不合同但相似.　　(D) 不合同且不相似.

(5) 将一枚硬币重复掷 $n$ 次,以 $X$ 和 $Y$ 分别表示正面向上和反面向上的次数,则 $X$ 和 $Y$ 的相关系数等于(　　)

(A) $-1$.　　(B) $0$.　　(C) $\frac{1}{2}$.　　(D) $1$.

**三、(本题满分 6 分)**

求 $\int \frac{\arctan \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$.

**四、(本题满分 6 分)**

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微,且 $f(1,1)=1$,$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2$,$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3$,$\varphi(x)=f(x,f(x,x))$.求 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}$.

**五、(本题满分 8 分)**

设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 试将 $f(x)$ 展开　$x$ 的幂级数,并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

**六、(本题满分 7 分)**

计算 $I=\oint_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$,其中 $L$ 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线,从 $z$ 轴正向看去,$L$ 为逆时针方向.

**七、(本题满分 7 分)**

设 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数且 $f''(x)\neq 0$,试证:

(1) 对于 $(-1,1)$ 内的任一 $x\neq 0$,存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$,使 $f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$ 成立;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

**八、(本题满分 8 分)**

设有一高度为 $h(t)$($t$ 为时间)的雪堆在融化过程中,其侧面满足方程 $z=h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$(设长度单位为厘米,时间单位为小时),已知体积减少的速率与侧面积成正比(比例系数 0.9),问高度为

130(厘米)的雪堆全部融化需多少小时?

**九、(本题满分 6 分)**

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系, $\boldsymbol{\beta}_1=t_1\boldsymbol{\alpha}_1+t_2\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_2=t_1\boldsymbol{\alpha}_2+t_2\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots$, $\boldsymbol{\beta}_s=t_1\boldsymbol{\alpha}_s+t_2\boldsymbol{\alpha}_1$,其中 $t_1,t_2$ 为实常数. 试问 $t_1,t_2$ 满足什么关系时, $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 也为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

**十、(本题满分 8 分)**

已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 3 维向量 $\boldsymbol{x}$,使得向量组 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$ 线性无关,且满足

$$\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{Ax}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}.$$

(1)记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})$,求 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$;

(2)计算行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

**十一、(本题满分 7 分)**

设某班车起点站上客人数 $X$ 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布,每位乘客在中途下车的概率为 $p(0<p<1)$,且中途下车与否相互独立. 以 $Y$ 表示在中途下车的人数,求:

(1) 在发车时有 $n$ 个乘客的条件下,中途有 $m$ 人下车的概率;

(2) 二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率分布.

**十二、(本题满分 7 分)**

设总体 $X$ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$,从该总体中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{2n}(n\geqslant 2)$,其样本均值为 $\overline{X}=\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{2n}X_i$,求统计量 $Y=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$ 的数学期望 $E(Y)$.

# 2002 年全国硕士研究生招生考试试题

## 一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\int_{e}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}=$ ______.

(2) 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定,则 $y''(0)=$ ______.

(3) 微分方程 $yy''+(y')^2=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 的特解是______.

(4) 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 可化成标准形 $f=6y_1^2$,则 $a=$ ______.

(5) 设随机变量 $X$ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$,且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{2}$,则 $\mu=$ ______.

## 二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面 4 条性质:

①$f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处连续;　②$f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处的两个偏导数连续;

③$f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处可微;　④$f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处的两个偏导数存在.

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 $P$ 推出性质 $Q$,则有(　　)

(A)②⇒③⇒①.　(B)③⇒②⇒①.　(C)③⇒④⇒①.　(D)③⇒①⇒④.

(2) 设 $u_n\neq 0(n=1,2,3,\cdots)$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$(　　)

(A) 发散.　(B) 绝对收敛.

(C) 条件收敛.　(D) 收敛性根据所给条件不能判定.

(3) 设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导,则(　　)

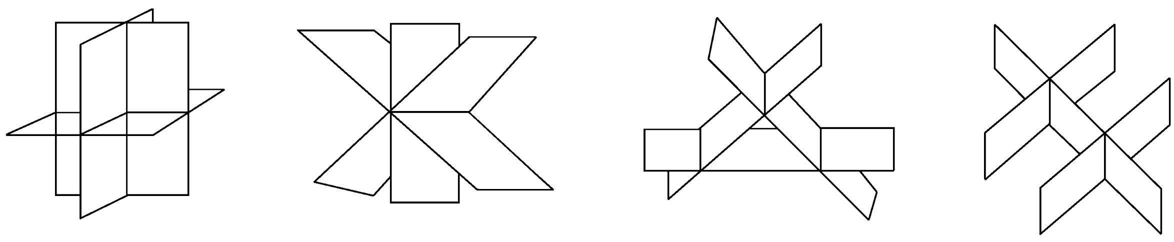
(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(C) 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$.

(D) 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$ 存在时,必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$.

(4) 设有三张不同平面的方程 $a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=b_i, i=1,2,3$,它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为 2,则这三张平面可能的位置关系为(　　)



(A)　(B)　(C)　(D)

(5) 设 $X_1$ 和 $X_2$ 是任意两个相互独立的连续型随机变量,它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$,分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$,则(　　)

(A) $f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

(B) $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

(C) $F_1(x)+F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

(D) $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

**三、(本题满分 6 分)**

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数,且 $f(0)\neq 0, f'(0)\neq 0$,若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时是比 $h$ 高阶的无穷小,试确定 $a,b$ 的值.

**四、(本题满分 7 分)**

已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x} e^{-t^2}dt$ 在点 $(0,0)$ 处的切线相同,写出此切线方程,并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\dfrac{2}{n}\right)$.

**五、(本题满分 7 分)**

计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$.

**六、(本题满分 8 分)**

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数,$L$ 是上半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线,其起点为 $(a,b)$,终点为 $(c,d)$. 记

$$I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy.$$

(1) 证明曲线积分 $I$ 与路径 $L$ 无关;

(2) 当 $ab=cd$ 时,求 $I$ 的值.

**七、(本题满分 7 分)**

(1) 验证函数 $y(x)=1+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^6}{6!}+\dfrac{x^9}{9!}+\cdots+\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$ 满足微分方程 $y''+y'+y=e^x$;

(2) 利用(1)的结果求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

**八、(本题满分 7 分)**

设有一小山,取它的底面所在的平面为 $xOy$ 坐标面,其底部所占的区域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-xy\leqslant 75\}$,小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

(1) 设 $M(x_0,y_0)$ 为区域 $D$ 上一点,问 $h(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大?若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$,试写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式.

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动,为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点.也就是说,要在 $D$ 的边界线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找出使(1) 中的 $g(x,y)$ 达到最大值的点. 试确定攀登起点的位置.

**九、(本题满分 6 分)**

已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 4 维列向量,其中 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$. 如果 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$,求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

**十、(本题满分 8 分)**

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵,

(1) 如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似,试证 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征多项式相等.

(2) 举一个 2 阶方阵的例子说明(1) 的逆命题不成立.

(3) 当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为实对称矩阵时,试证(1) 的逆命题成立.

**十一、(本题满分 7 分)**

设随机变量 $X$ 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

对 $X$ 独立地重复观察 4 次,用 $Y$ 表示观察值大于$\dfrac{\pi}{3}$ 的次数,求 $Y^2$的数学期望.

**十二、(本题满分 7 分)**

设总体 $X$ 的概率分布为

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\theta^2$ | $2\theta(1-\theta)$ | $\theta^2$ | $1-2\theta$ |

其中 $\theta\left(0<\theta<\dfrac{1}{2}\right)$ 是未知参数,利用总体 $X$ 的如下样本值

$$3,1,3,0,3,1,2,3,$$

求 $\theta$ 的矩估计值和最大似然估计值.

# 2003 年全国硕士研究生招生考试试题

## 一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} =$ ______.

(2) 曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $2x + 4y - z = 0$ 平行的切平面的方程是______.

(3) 设 $x^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$,则 $a_2 =$ ______.

(4) 从 $\mathbf{R}^2$ 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为______.

(5) 设二维随机变量$(X,Y)$的概率密度为

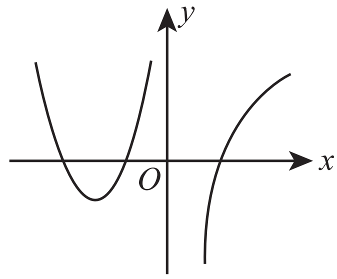
$$f(x,y) = \begin{cases} 6x, & 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则 $P\{X + Y \leqslant 1\} =$ ______.

(6) 已知一批零件的长度 $X$(单位:cm) 服从正态分布 $N(\mu,1)$,从中随机地抽取 16 个零件,得到长度的平均值为 40(cm),则 $\mu$ 的置信度为 0.95 的置信区间是______.
(注:标准正态分布函数值 $\Phi(1.96) = 0.975, \Phi(1.645) = 0.95$.)

## 二、选择题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续,其导函数的图形如图所示,则 $f(x)$ 有(　　)




(A) 一个极小值点和两个极大值点.
(B) 两个极小值点和一个极大值点.
(C) 两个极小值点和两个极大值点.
(D) 三个极小值点和一个极大值点.

(2) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1, \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$,则必有(　　)

(A) $a_n < b_n$ 对任意 $n$ 成立.　　(B) $b_n < c_n$ 对任意 $n$ 成立.
(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n$ 不存在.　　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 不存在.

(3) 已知函数 $f(x,y)$ 在点$(0,0)$的某个邻域内连续,且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{f(x,y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1$,则(　　)

(A) 点$(0,0)$不是 $f(x,y)$ 的极值点.
(B) 点$(0,0)$是 $f(x,y)$ 的极大值点.
(C) 点$(0,0)$是 $f(x,y)$ 的极小值点.
(D) 根据所给条件无法判别点$(0,0)$是否为 $f(x,y)$ 的极值点.

(4) 设向量组 Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示,则(　　)

(A) 当 $r < s$ 时,向量组 Ⅱ 必线性相关.　　(B) 当 $r > s$ 时,向量组 Ⅱ 必线性相关.
(C) 当 $r < s$ 时,向量组 Ⅰ 必线性相关.　　(D) 当 $r > s$ 时,向量组 Ⅰ 必线性相关.

(5) 设有齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$,其中 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 $m \times n$ 矩阵,现有 4 个命题:

①若 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 的解,则秩$(\boldsymbol{A}) \geqslant$ 秩$(\boldsymbol{B})$;

②若秩$(\boldsymbol{A}) \geqslant$ 秩$(\boldsymbol{B})$,则 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的解;

③若 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 同解,则秩$(\boldsymbol{A})=$ 秩$(\boldsymbol{B})$;

④若秩$(\boldsymbol{A})=$ 秩$(\boldsymbol{B})$,则 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 同解.

以上命题中正确的是(　　)

(A)①②.　　(B)①③.　　(C)②④.　　(D)③④.

(6) 设随机变量 $X \sim t(n)(n>1)$, $Y=\dfrac{1}{X^2}$,则(　　)

(A)$Y \sim \chi^2(n)$.　　(B)$Y \sim \chi^2(n-1)$.　　(C)$Y \sim F(n,1)$.　　(D)$Y \sim F(1,n)$.

**三、(本题满分 10 分)**

过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线,该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 $x$ 轴围成平面图形 $D$.

(1) 求 $D$ 的面积 $A$;

(2) 求 $D$ 绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转一周所得旋转体的体积 $V$.

**四、(本题满分 12 分)**

将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 $x$ 的幂级数,并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

**五、(本题满分 10 分)**

已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \pi\}$, $L$ 为 $D$ 的正向边界. 试证:

(1) $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x = \oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$;

(2) $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x \geqslant 2\pi^2$.

**六、(本题满分 10 分)**

某建筑工程打地基时,需用汽锤将桩打进土层. 汽锤每次击打,都将克服土层对桩的阻力而作功. 设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比(比例系数为 $k, k>0$),汽锤第一次击打将桩打进地下 $a$(m). 根据设计方案,要求汽锤每次击打桩时所作的功与前一次击打时所作的功之比为常数 $r(0<r<1)$. 问

(1) 汽锤击打桩 3 次后,可将桩打进地下多深?

(2) 若击打次数不限,汽锤至多能将桩打进地下多深?

(注:m 表示长度单位米.)

**七、(本题满分 12 分)**

设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数,且 $y' \neq 0$, $x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

(1) 试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}+(y+\sin x)\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程;

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=\dfrac{3}{2}$ 的解.

**八、(本题满分 12 分)**

设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零,

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v}{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma},\quad G(t)=\frac{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma}{\int_{-t}^{t} f(x^2)\,\mathrm{d}x},$$

其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\}$, $D(t)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant t^2\}$.

(1) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性.

(2) 证明:当 $t>0$ 时, $F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$.

**九、(本题满分 10 分)**

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$,求 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值与特征向量,其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

**十、(本题满分 8 分)**

已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1: ax+2by+3c=0;$$
$$l_2: bx+2cy+3a=0;$$
$$l_3: cx+2ay+3b=0.$$

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0$.

**十一、(本题满分 10 分)**

已知甲、乙两箱中装有同种产品,其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品,乙箱中仅装有 3 件合格品. 从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后,求:

(1) 乙箱中次品件数 $X$ 的数学期望;

(2) 从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

**十二、(本题满分 8 分)**

设总体 $X$ 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}, & x>\theta,\\ 0, & x\leqslant\theta,\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 是未知参数. 从总体 $X$ 中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$,记 $\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

(1) 求总体 $X$ 的分布函数 $F(x)$;

(2) 求统计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$;

(3) 如果用 $\hat{\theta}$ 作为 $\theta$ 的估计量,讨论它是否具有无偏性.

# 2004 年全国硕士研究生招生考试试题

## 一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

(1) 曲线 $y = \ln x$ 上与直线 $x + y = 1$ 垂直的切线方程为______.

(2) 已知 $f'(e^x) = xe^{-x}$,且 $f(1) = 0$,则 $f(x) =$ ______.

(3) 设 $L$ 为正向圆周 $x^2 + y^2 = 2$ 在第一象限中的部分,则曲线积分 $\int_L x\mathrm{d}y - 2y\mathrm{d}x$ 的值为______.

(4) 欧拉方程 $x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 4x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = 0(x > 0)$ 的通解为______.

(5) 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{ABA}^* = 2\boldsymbol{BA}^* + \boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,$\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵,则 $|\boldsymbol{B}| =$ ______.

(6) 设随机变量 $X$ 服从参数为 $\lambda$ 的指数分布,则 $P\{X > \sqrt{D(X)}\} =$ ______.

## 二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分)

(7) 把 $x \to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha = \int_0^x \cos(t^2)\mathrm{d}t, \beta = \int_0^{x^2} \tan\sqrt{t}\mathrm{d}t, \gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin(t^3)\mathrm{d}t$ 排列起来,使排在后面的是前一个的高阶无穷小量,则正确的排列次序是(　　)

(A) $\alpha,\beta,\gamma$.　　(B) $\alpha,\gamma,\beta$.　　(C) $\beta,\alpha,\gamma$.　　(D) $\beta,\gamma,\alpha$.

(8) 设函数 $f(x)$ 连续,且 $f'(0) > 0$,则存在 $\delta > 0$,使得(　　)

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加.

(B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少.

(C) 对任意的 $x \in (0,\delta)$,有 $f(x) > f(0)$.

(D) 对任意的 $x \in (-\delta,0)$,有 $f(x) > f(0)$.

(9) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数. 下列结论中正确的是(　　)

(A) 若 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(B) 若存在非零常数 $\lambda$,使得 $\lim_{n\to\infty} na_n = \lambda$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(C) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则 $\lim_{n\to\infty} n^2a_n = 0$.

(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,则存在非零常数 $\lambda$,使得 $\lim_{n\to\infty} na_n = \lambda$.

(10) 设 $f(x)$ 为连续函数,$F(t) = \int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$,则 $F'(2)$ 等于(　　)

(A) $2f(2)$.　　(B) $f(2)$.　　(C) $-f(2)$.　　(D) 0.

(11) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 2 列交换得 $\boldsymbol{B}$,再把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 3 列得 $\boldsymbol{C}$,则满足 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为(　　)

(A) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(12) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 的任意两个非零矩阵,则必有(　　)

(A) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关.

(B) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.

(C) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关.

(D) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.

(13) 设随机变量 $X$ 服从正态分布 $N(0,1)$,对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$,数 $u_\alpha$ 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$. 若 $P\{|X|<x\}=\alpha$,则 $x$ 等于(　　)

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$.　　(B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.　　(C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$.　　(D) $u_{1-\alpha}$.

(14) 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$ 独立同分布,且其方差为 $\sigma^2>0$. 令 $Y=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$,则(　　)

(A) $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\dfrac{\sigma^2}{n}$.　　(B) $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\sigma^2$.

(C) $D(X_1+Y)=\dfrac{n+2}{n}\sigma^2$.　　(D) $D(X_1-Y)=\dfrac{n+1}{n}\sigma^2$.

**三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)**

(15) (本题满分 12 分)

设 $\mathrm{e}<a<b<\mathrm{e}^2$,证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}(b-a)$.

(16) (本题满分 11 分)

某种飞机在机场降落时,为了减少滑行距离,在触地的瞬间,飞机尾部张开减速伞,以增大阻力,使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为 9000kg 的飞机,着陆时的水平速度为 700 km/h. 经测试,减速伞打开后,飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为 $k=6.0\times10^6$). 问从着陆点算起,飞机滑行的最长距离是多少?

(注:kg 表示千克,km/h 表示千米/小时.)

(17) (本题满分 12 分)

计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\Sigma$ 是曲面 $z=1-x^2-y^2(z\geqslant0)$ 的上侧.

(18)(本题满分 11 分)

设有方程 $x^n+nx-1=0$,其中 $n$ 为正整数. 证明此方程存在唯一正实根 $x_n$,并证明当 $\alpha>1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$ 收敛.

(19)(本题满分 12 分)

设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数,求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值.

(20)(本题满分 9 分)

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0,\\ 2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0,\\ \quad\cdots\cdots\\ nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0,\end{cases}\qquad(n\geqslant 2),$$

试问 $a$ 取何值时,该方程组有非零解,并求出其通解.

(21)(本题满分 9 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{pmatrix}$的特征方程有一个二重根,求 $a$ 的值,并讨论 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化.

(22)(本题满分 9 分)

设 $A,B$ 为随机事件,且 $P(A)=\dfrac{1}{4},P(B\mid A)=\dfrac{1}{3},P(A\mid B)=\dfrac{1}{2}$,令

$$X=\begin{cases}1,A\text{ 发生},\\0,A\text{ 不发生};\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1,B\text{ 发生},\\0,B\text{ 不发生}.\end{cases}$$

求:(Ⅰ 二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率分布;

(Ⅱ)$X$ 与 $Y$ 的相关系数 $\rho_{XY}$.

(23)(本题满分 9 分)

设总体 $X$ 的分布函数为

$$F(x;\beta)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x>1,\\ 0, & x\leqslant 1,\end{cases}$$

其中未知参数 $\beta>1,X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X$ 的简单随机样本,求:

(Ⅰ)$\beta$ 的矩估计量;

(Ⅱ)$\beta$ 的最大似然估计量.

# 2005 年全国硕士研究生招生考试试题

## 一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

(1) 曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为______.

(2) 微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 的解为______.

(3) 设函数 $u(x,y,z)=1+\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{18}$,单位向量 $\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$,则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,2,3)}=$ ______.

(4) 设 $\Omega$ 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成的空间区域,$\Sigma$ 是 $\Omega$ 的整个边界的外侧,则 $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ______.

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维列向量,记矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3).$$

如果 $|\boldsymbol{A}|=1$,那么 $|\boldsymbol{B}|=$ ______.

(6) 从数 1,2,3,4 中任取一个数,记为 $X$,再从 $1,\cdots,X$ 中任取一个数,记为 $Y$,则 $P\{Y=2\}=$ ______.

## 二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分)

(7) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内(　　)

(A) 处处可导.　　(B) 恰有一个不可导点.

(C) 恰有两个不可导点.　　(D) 至少有三个不可导点.

(8) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数,"$M\Leftrightarrow N$"表示"$M$ 的充分必要条件是 $N$",则必有(　　)

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.

(9) 设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\mathrm{d}t$,其中函数 $\varphi$ 具有二阶导数,$\psi$ 具有一阶导数,则必有(　　)

(A) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　(B) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　(C) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　(D) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

(10) 设有三元方程 $xy-z\ln y+\mathrm{e}^{xz}=1$,根据隐函数存在定理,存在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域,在此邻域内该方程(　　)

(A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$.

(B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x,z)$ 和 $z=z(x,y)$.

(C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $z=z(x,y)$.

(D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$.

(11) 设 $\lambda_1,\lambda_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值,对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性无关的充分必要条件是(　　)

(A) $\lambda_1 \neq 0$.　　(B) $\lambda_2 \neq 0$.　　(C) $\lambda_1 = 0$.　　(D) $\lambda_2 = 0$.

(12) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n \geqslant 2)$ 阶可逆矩阵,交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{A}^*$,$\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵,则(　　)

(A) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $\boldsymbol{B}^*$.

(B) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得 $\boldsymbol{B}^*$.

(C) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $-\boldsymbol{B}^*$.

(D) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得 $-\boldsymbol{B}^*$.

(13) 设二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率分布为

| $X$ \ $Y$ | 0 | 1 |
| --- | --- | --- |
| 0 | 0.4 | $a$ |
| 1 | $b$ | 0.1 |

已知随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立,则(　　)

(A) $a=0.2,b=0.3$.　　(B) $a=0.4,b=0.1$.

(C) $a=0.3,b=0.2$.　　(D) $a=0.1,b=0.4$.

(14) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n \geqslant 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本,$\overline{X}$ 为样本均值,$S^2$ 为样本方差,则(　　)

(A) $n\overline{X} \sim N(0,1)$.　　(B) $nS^2 \sim \chi^2(n)$.

(C) $\dfrac{(n-1)\overline{X}}{S} \sim t(n-1)$.　　(D) $\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1,n-1)$.

**三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)**

(15) (本题满分 11 分)

设 $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant \sqrt{2}, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$,$[1+x^2+y^2]$ 表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数,计算二重积分 $\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

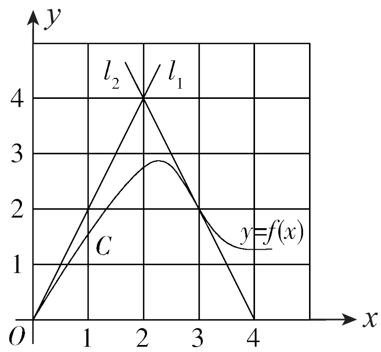
(16) (本题满分 12 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[1+\dfrac{1}{n(2n-1)}\right]x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

(17) (本题满分 11 分)

如图,曲线 $C$ 的方程为 $y=f(x)$,点 $(3,2)$ 是它的一个拐点,直线 $l_1$ 与 $l_2$ 分别是曲线 $C$ 在点 $(0,0)$ 与 $(3,2)$ 处的切线,其交点为 $(2,4)$. 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数,计算定积分

$$\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)\,\mathrm{d}x.$$



(18)(本题满分 12 分)

已知函数$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且$f(0)=0$,$f(1)=1$. 证明:

(Ⅰ)存在$\xi\in(0,1)$,使得$f(\xi)=1-\xi$;

(Ⅱ)存在两个不同的点$\eta,\zeta\in(0,1)$,使得$f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

(19)(本题满分 12 分)

设函数$\varphi(y)$具有连续导数,在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线$L$上,曲线积分$\oint_L\dfrac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$的值恒为同一常数.

(Ⅰ)证明:对右半平面$x>0$内的任意分段光滑简单闭曲线$C$,有

$$\oint_C\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0;$$

(Ⅱ)求函数$\varphi(y)$的表达式.

(20)(本题满分 9 分)

已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$的秩为 2.

(Ⅰ)求$a$的值;

(Ⅱ)求正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$,把$f(x_1,x_2,x_3)$化成标准形;

(Ⅲ)求方程$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解.

(21)(本题满分 9 分)

已知 3 阶矩阵$\boldsymbol{A}$的第一行是$(a,b,c)$,$a,b,c$不全为零,矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$($k$为常数),且$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,求线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的通解.

(22)(本题满分 9 分)

设二维随机变量$(X,Y)$的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\ 0<y<2x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

求:(Ⅰ)$(X,Y)$的边缘概率密度$f_X(x)$,$f_Y(y)$;

(Ⅱ)$Z=2X-Y$的概率密度$f_Z(z)$.

(23)(本题满分 9 分)

设$X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$为来自总体$N(0,1)$的简单随机样本,$\overline{X}$为样本均值,记$Y_i=X_i-\overline{X}$,$i=1,2,\cdots,n$.

求:(Ⅰ)$Y_i$的方差$D(Y_i)$,$i=1,2,\cdots,n$;

(Ⅱ)$Y_1$与$Y_n$的协方差$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)$.

# 2006 年全国硕士研究生招生考试试题

## 一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$______.

(2) 微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解是______.

(3) 设 $\Sigma$ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的下侧,则 $\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$______.

(4) 点 $(2,1,0)$ 到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离 $d=$______.

(5) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{E}$ 为 2 阶单位矩阵,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$,则 $|\boldsymbol{B}|=$______.

(6) 设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立,且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布,由 $P\{\max\{X,Y\}\leqslant 1\}=$ ______.

## 二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分)

(7) 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数,且 $f'(x)>0$, $f''(x)>0$, $\Delta x$ 为自变量 $x$ 在点 $x_0$ 处的增量,$\Delta y$ 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处对应的增量与微分,若 $\Delta x>0$,则(　　)

(A) $0<\mathrm{d}y<\Delta y$.　　(B) $0<\Delta y<\mathrm{d}y$.

(C) $\Delta y<\mathrm{d}y<0$.　　(D) $\mathrm{d}y<\Delta y<0$.

(8) 设 $f(x,y)$ 为连续函数,则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 等于(　　)

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.　　(B) $\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(D) $\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

(9) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则级数(　　)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 收敛.　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛.

(10) 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数,且 $\varphi_y'(x,y)\neq 0$. 已知 $(x_0,y_0)$ 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点,下列选项正确的是(　　)

(A) 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$,则 $f_y'(x_0,y_0)=0$.

(B) 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$,则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

(C) 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$,则 $f_y'(x_0,y_0)=0$.

(D) 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$,则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

(11) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 $n$ 维列向量，$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，下列选项正确的是(　　)

(A) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关.

(B) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关.

(C) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关.

(D) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关.

(12) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行加到第 1 行得 $\boldsymbol{B}$，再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 $-1$ 倍加到第 2 列得 $\boldsymbol{C}$，记 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则(　　)

(A) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$.　　(B) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$.

(C) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$.　　(D) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}$.

(13) 设 $A,B$ 为随机事件，且 $P(B)>0$，$P(A|B)=1$，则必有(　　)

(A) $P(A\cup B)>P(A)$.　　(B) $P(A\cup B)>P(B)$.

(C) $P(A\cup B)=P(A)$.　　(D) $P(A\cup B)=P(B)$.

(14) 设随机变量 $X$ 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y$ 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且

$$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\},$$

则必有(　　)

(A) $\sigma_1<\sigma_2$.　　(B) $\sigma_1>\sigma_2$.

(C) $\mu_1<\mu_2$.　　(D) $\mu_1>\mu_2$.

**三、解答题(本题共 9 小题，满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)**

(15) (本题满分 10 分)

设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0\}$，计算二重积分 $I=\iint\limits_D \dfrac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(16) (本题满分 12 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi$，$x_{n+1}=\sin x_n\,(n=1,2,\cdots)$.

(Ⅰ) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限；

(Ⅱ) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

(17) (本题满分 12 分)

将函数 $f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 $x$ 的幂级数.

(18) (本题满分 12 分)

设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足等式 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

(Ⅰ) 验证 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$；

(Ⅱ) 若 $f(1)=0$，$f'(1)=1$，求函数 $f(u)$ 的表达式.

(19) (本题满分 12 分)

设在上半平面 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$ 内，函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数，且对任意的 $t>0$ 都有

$f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$.

证明:对 $D$ 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 $L$,都有$\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x-xf(x,y)\mathrm{d}y=0$.

(20)(本题满分 9 分)

已知非齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1,\\4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1,\\ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1\end{cases}$有 3 个线性无关的解.

(Ⅰ)证明方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$;

(Ⅱ)求 $a,b$ 的值及方程组的通解.

(21)(本题满分 9 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3. 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个解.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量;

(Ⅱ)求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$.

(22)(本题满分 9 分)

设随机变量 $X$ 的概率密度为$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1<x<0,\\\dfrac{1}{4}, & 0\leqslant x<2,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$令 $Y=X^2$,$F(x,y)$ 为二维随机变量 $(X,Y)$ 的分布函数,求:

(Ⅰ)$Y$ 的概率密度 $f_Y(y)$;

(Ⅱ)$F\left(-\dfrac{1}{2},4\right)$.

(23)(本题满分 9 分)

设总体 $X$ 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1,\\1-\theta, & 1\leqslant x<2,\\0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $\theta$ 是未知参数$(0<\theta<1)$. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X$ 的简单随机样本,记 $N$ 为样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中小于 1 的个数. 求 $\theta$ 的最大似然估计.

# 2007 年全国硕士研究生招生考试试题

## 一、选择题(本题共 10 小题,每小题 4 分,满分 40 分)

(1)当 $x \to 0^+$ 时,与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是(　　)

(A)$1-e^{\sqrt{x}}$.　　(B)$\ln \dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$.　　(C)$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$.　　(D)$1-\cos\sqrt{x}$.

(2)曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 渐近线的条数为(　　)

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

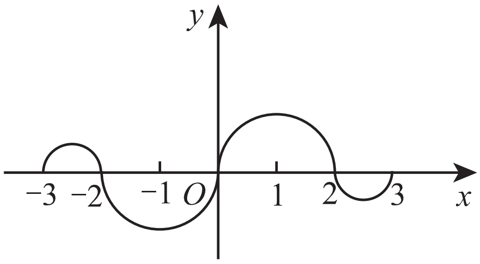
(3)如图,连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2]$,$[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周,在区间 $[-2,0]$,$[0,2]$ 上的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周. 设 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$,则下列结论正确的是(　　)

(A)$F(3)=-\dfrac{3}{4}F(-2)$.

(B)$F(3)=\dfrac{5}{4}F(2)$.

(C)$F(-3)=\dfrac{3}{4}F(2)$.

(D)$F(-3)=-\dfrac{5}{4}F(-2)$.




(4)设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,下列命题错误的是(　　)

(A)若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$.　　(B)若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$.

(C)若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在.　　(D)若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在.

(5)设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数,且 $f''(x)>0$,令 $u_n=f(n)\ (n=1,2,\cdots)$,则下列结论正确的是(　　)

(A)若 $u_1>u_2$,则 $\{u_n\}$ 必收敛.　　(B)若 $u_1>u_2$,则 $\{u_n\}$ 必发散.

(C)若 $u_1<u_2$,则 $\{u_n\}$ 必收敛.　　(D)若 $u_1<u_2$,则 $\{u_n\}$ 必发散.

(6)设曲线 $L$:$f(x,y)=1$($f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数)过第Ⅱ象限内的点 $M$ 和第Ⅳ象限内的点 $N$,$\Gamma$ 为 $L$ 上从点 $M$ 到点 $N$ 的一段弧,则下列积分小于零的是(　　)

(A)$\int_\Gamma f(x,y)\,dx$.　　(B)$\int_\Gamma f(x,y)\,dy$.

(C)$\int_\Gamma f(x,y)\,ds$.　　(D)$\int_\Gamma f'_x(x,y)\,dx+f'_y(x,y)\,dy$.

(7)设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,则下列向量组线性相关的是(　　)

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$.　　(B)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$.　　(D)$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$.

(8)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$(　　)

(A)合同,且相似. (B)合同,但不相似.

(C)不合同,但相似. (D)既不合同,也不相似.

(9)某人向同一目标独立重复射击,每次射击命中目标的概率为 $p(0<p<1)$,则此人第4次射击恰好第2次命中目标的概率为( )

(A) $3p(1-p)^2$. (B) $6p(1-p)^2$. (C) $3p^2(1-p)^2$. (D) $6p^2(1-p)^2$.

(10)设随机变量 $(X,Y)$ 服从二维正态分布,且 $X$ 与 $Y$ 不相关, $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 分别表示 $X,Y$ 的概率密度,则在 $Y=y$ 的条件下,$X$ 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为( )

(A) $f_X(x)$. (B) $f_Y(y)$. (C) $f_X(x)f_Y(y)$. (D) $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$.

## 二、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分)

(11) $\int_1^2 \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}dx=$______.

(12)设 $f(u,v)$ 为二元可微函数, $z=f(x^y,y^x)$,则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$______.

(13)二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的通解为 $y=$______.

(14)设曲面 $\Sigma:|x|+|y|+|z|=1$,则 $\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(x+|y|)dS=$______.

(15)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^3$ 的秩为______.

(16)在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数,则这两个数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为______.

## 三、解答题(本题共8小题,满分86分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(17)(本题满分11分)

求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4,y\geqslant 0\}$ 上的最大值和最小值.

(18)(本题满分10分)

计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}xzdydz+2zydzdx+3xydxdy$,其中 $\Sigma$ 为曲面 $z=1-x^2-\frac{y^2}{4}(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的上侧.

(19)(本题满分11分)

设函数 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 $(a,b)$ 内具有二阶导数且存在相等的最大值, $f(a)=g(a)$, $f(b)=g(b)$,证明:存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

(20)(本题满分10分)

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛,其和函数 $y(x)$ 满足

$$y''-2xy'-4y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1.$$

(Ⅰ)证明 $a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n,n=1,2,\cdots$;

(Ⅱ)求 $y(x)$ 的表达式.

(21)(本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+ax_3=0, \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases} \qquad ①$$

与方程

$$x_1+2x_2+x_3=a-1$$

有公共解,求 $a$ 的值及所有公共解.

(22)(本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$,且 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_1$ 的一个特征向量. 记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ)验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量,并求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值与特征向量;

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

(23)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} 2-x-y, & 0<x<1,0<y<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(Ⅰ)求 $P\{X>2Y\}$;

(Ⅱ)求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

(24)(本题满分 11 分)

设总体 $X$ 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\theta}, & 0<x<\theta, \\ \dfrac{1}{2(1-\theta)}, & \theta\leqslant x<1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中参数 $\theta(0<\theta<1)$ 未知,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X$ 的简单随机样本,$\overline{X}$ 是样本均值.

(Ⅰ)求参数 $\theta$ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;

(Ⅱ)判断 $4\overline{X}^2$ 是否为 $\theta^2$ 的无偏估计量,并说明理由.

# 2008 年全国硕士研究生招生考试试题

## 一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分)

(1) 设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)\,dt$,则 $f'(x)$ 的零点个数为(　　)

(A) 0.　(B) 1.　(C) 2.　(D) 3.

(2) 函数 $f(x,y)=\arctan\frac{x}{y}$ 在点 $(0,1)$ 处的梯度等于(　　)

(A) $\boldsymbol{i}$.　(B) $-\boldsymbol{i}$.　(C) $\boldsymbol{j}$.　(D) $-\boldsymbol{j}$.

(3) 在下列微分方程中,以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$ ($C_1,C_2,C_3$ 为任意常数) 为通解的是(　　)

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$.　(B) $y'''+y''+4y'+4y=0$.

(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$.　(D) $y'''-y''+4y'-4y=0$.

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界,$\{x_n\}$ 为数列,下列命题正确的是(　　)

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 收敛.　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调,则 $\{x_n\}$ 收敛.

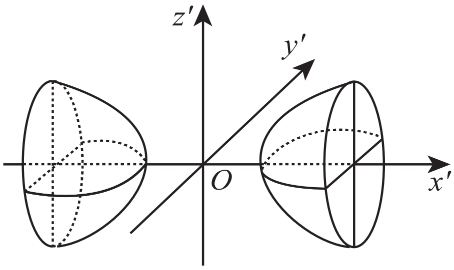
(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶非零矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 $n$ 阶单位矩阵,若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$,则(　　)

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.　(B) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.

(C) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.　(D) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵,如果二次曲面方程

$$(x,y,z)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=1$$




在正交变换下的标准方程的图形如图所示,则 $\boldsymbol{A}$ 的正特征值的个数为(　　)

(A) 0.　(B) 1.　(C) 2.　(D) 3.

(7) 设随机变量 $X,Y$ 独立同分布,且 $X$ 的分布函数为 $F(x)$,则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为(　　)

(A) $F^2(x)$.　(B) $F(x)F(y)$.

(C) $1-[1-F(x)]^2$.　(D) $[1-F(x)][1-F(y)]$.

(8) 设随机变量 $X\sim N(0,1)$,$Y\sim N(1,4)$,且相关系数 $\rho_{XY}=1$,则(　　)

(A) $P\{Y=-2X-1\}=1$.　(B) $P\{Y=2X-1\}=1$.

(C) $P\{Y=-2X+1\}=1$.　(D) $P\{Y=2X+1\}=1$.

## 二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

(9) 微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $y=$______.

(10) 曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程是______.

(11) 已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛,在 $x=-4$ 处发散,则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域为______.

(12)设曲面 $\Sigma$ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧，则 $\iint\limits_{\Sigma} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$______.

(13)设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 维列向量，$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为______.

(14)设随机变量 $X$ 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\{X=E(X^2)\}=$______.

三、解答题(本题共 9 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 9 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

(16)(本题满分 9 分)

计算曲线积分 $\int_L \sin 2x\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\mathrm{d}y$，其中 $L$ 是曲线 $y=\sin x$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(\pi,0)$ 的一段.

(17)(本题满分 11 分)

已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0,\\ x+y+3z=5,\end{cases}$ 求曲线 $C$ 上距离 $xOy$ 面最远的点和最近的点.

(18)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是连续函数，

(Ⅰ)利用定义证明函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 可导，且 $F'(x)=f(x)$；

(Ⅱ)当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时，证明 $G(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$ 也是以 2 为周期的周期函数.

(19)(本题满分 11 分)

将函数 $f(x)=1-x^2(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成余弦级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

(20)(本题满分 10 分)

设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 3 维列向量，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 分别是 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的转置. 证明：

(Ⅰ)秩 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$；

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则秩 $r(\boldsymbol{A})<2$.

(21)(本题满分 12 分)

设 $n$ 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a^2 & 2a & 1\\ & & & a^2 & 2a\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)证明行列式 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$；

(Ⅱ)当 $a$ 为何值时，该方程组有唯一解，并求 $x_1$；

(Ⅲ)当 $a$ 为何值时，该方程组有无穷多解，并求通解.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立,$X$ 的概率分布为 $P\{X=i\}=\frac{1}{3}(i=-1,0,1)$,$Y$ 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 记 $Z=X+Y$.

(Ⅰ)求 $P\left\{Z\leqslant\frac{1}{2}\,\middle|\,X=0\right\}$;

(Ⅱ)求 $Z$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

(23)(本题满分 11 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本,记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\qquad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\qquad T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2.$$

(Ⅰ)证明 $T$ 是 $\mu^2$ 的无偏估计量;

(Ⅱ)当 $\mu=0,\sigma=1$ 时,求 $D(T)$.

# 2009 年全国硕士研究生招生考试试题

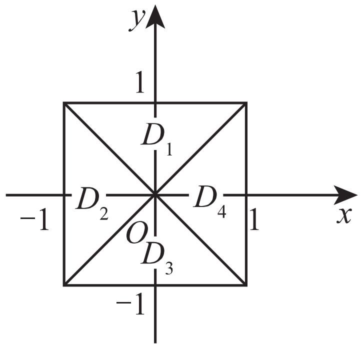
## 一、选择题(本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分)

(1)当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小量，则(　　)

(A) $a=1, b=-\dfrac{1}{6}$.　　(B) $a=1, b=\dfrac{1}{6}$.

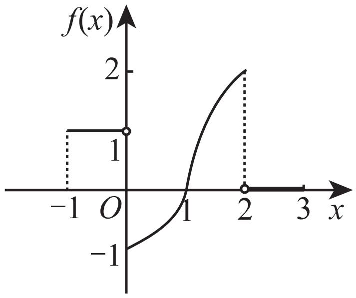
(C) $a=-1, b=-\dfrac{1}{6}$.　　(D) $a=-1, b=\dfrac{1}{6}$.

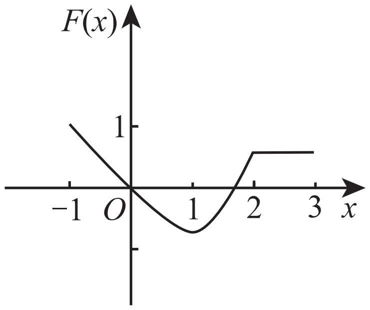
(2)如图，正方形 $\{(x,y)\mid |x|\leqslant 1, |y|\leqslant 1\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k(k=1,2,3,4)$，$I_k=\iint\limits_{D_k} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 4}\{I_k\}=$(　　)



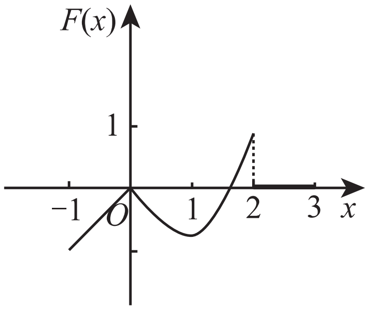

(A) $I_1$.　　(B) $I_2$.　　(C) $I_3$.　　(D) $I_4$.

(3)设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形如右图所示，则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的图形为(　　)

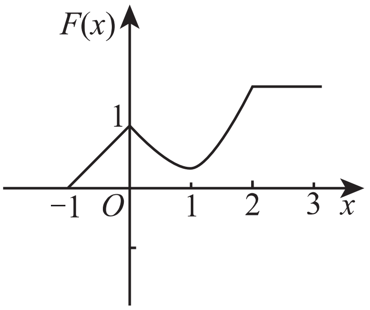


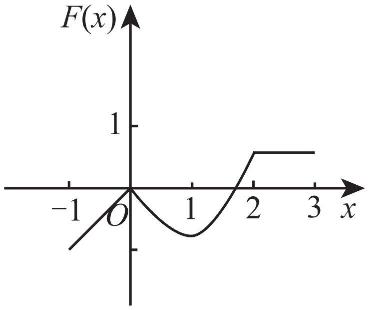

(A)




(B)




(C)




(D)

(4)设有两个数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，则(　　)

(A)当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ 收敛.　　(B)当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ 发散.

(C)当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2b_n^2$ 收敛.　　(D)当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2b_n^2$ 发散.

(5)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的一组基，则由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\dfrac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵为(　　)

(A) $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&3\\1&0&3\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

(6)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶矩阵,$\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵,若 $|\boldsymbol{A}|=2,|\boldsymbol{B}|=3$,则分块矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为(　　)

(A) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B}^* \\ 2\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.　(B) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^* \\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.　(C) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}^* \\ 2\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.　(D) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{A}^* \\ 3\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.

(7)设随机变量 $X$ 的分布函数为 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$,其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数,则 $E(X)=$(　　)

(A)0.　(B)0.3.　(C)0.7.　(D)1.

(8)设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立,且 $X$ 服从标准正态分布 $N(0,1)$,$Y$ 的概率分布为 $P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$. 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数,则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为(　　)

(A)0.　(B)1.　(C)2.　(D)3.

## 二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

(9)设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数,$z=f(x,xy)$,则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$______.

(10)若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$,则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2,y'(0)=0$ 的解为 $y=$______.

(11)已知曲线 $L:y=x^2(0\leqslant x\leqslant\sqrt{2})$,则 $\int_L x\mathrm{d}s=$______.

(12)设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$,则 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$______.

(13)若 3 维列向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=2$,其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置,则矩阵 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的非零特征值为______.

(14)设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 为来自二项分布总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本,$\overline{X}$ 和 $S^2$ 分别为样本均值和样本方差,若 $\overline{X}+kS^2$ 为 $np^2$ 的无偏估计量,则 $k=$______.

## 三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 9 分)

求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

(16)(本题满分 9 分)

设 $a_n$ 为曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}(n=1,2,\cdots)$ 所围成区域的面积,记 $S_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$,求 $S_1$ 与 $S_2$ 的值.

(17)(本题满分 11 分)

椭球面 $S_1$ 是椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 绕 $x$ 轴旋转而成,圆锥面 $S_2$ 是由过点(4,0)且与椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 相切的直线绕 $x$ 轴旋转而成.

(Ⅰ)求 $S_1$ 及 $S_2$ 的方程;

(Ⅱ)求 $S_1$ 与 $S_2$ 之间的立体的体积.

(18)(本题满分 11 分)

(Ⅰ)证明拉格朗日中值定理:若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 $(a,b)$ 内可导,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(Ⅱ)证明:若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导,且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=A$,则 $f'_+(0)$ 存在,且 $f'_+(0)=A$.

(19)(本题满分 10 分)

计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,其中 $\Sigma$ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求满足 $\boldsymbol{A\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$,$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2$,$\boldsymbol{\xi}_3$;

(Ⅱ)对(Ⅰ)中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2$,$\boldsymbol{\xi}_3$,证明 $\boldsymbol{\xi}_1$,$\boldsymbol{\xi}_2$,$\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

(Ⅰ)求二次型 $f$ 的矩阵的所有特征值;

(Ⅱ)若二次型 $f$ 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$,求 $a$ 的值.

(22)(本题满分 11 分)

袋中有 1 个红球、2 个黑球与 3 个白球. 现有放回地从袋中取两次,每次取一个球. 以 $X,Y,Z$ 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

(Ⅰ)求 $P\{X=1\mid Z=0\}$;

(Ⅱ)求二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率分布.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 $X$ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda^2xe^{-\lambda x}, & x>0,\\0, & 其他,\end{cases}$ 其中参 $\lambda(\lambda>0)$ 未知,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X$ 的简单随机样本.

(Ⅰ)求参数 $\lambda$ 的矩估计量;

(Ⅱ)求参数 $\lambda$ 的最大似然估计量.

# 1987 年真题参考答案

## (试卷 Ⅰ)

**一、填空题**

(1) $x-y+z=0$.　(2) $-\dfrac{1}{\ln 2}$.　(3) $\dfrac{3}{2}$.　(4) $-18\pi$.　(5) $(1,1,-1)$.

二、$a=4,b=1$.

三、(1) $(1+y)g'\cdot(f_1'+yf_2')$.　(2) $\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}$.

四、$y=Y+y^*=C_1+e^{-3x}(C_2\cos ax+C_3\sin ax)+\dfrac{x}{9+a^2}$,其中 $C_1,C_2,C_3$ 为任意常数.

**五、选择题**

(1)C.　(2)D.　(3)B.　(4)C.

六、收敛域为 $[-2,2)$, $S(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{2}{2-x}, & x\in[-2,0)\cup(0,2),\\ \dfrac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$

七、$34\pi$.

八、证明略.(可考虑函数 $F(x)=f(x)-x$,对 $F(x)$ 使用零点定理.)

九、① 当 $a\neq 1$ 时,方程组有唯一解;② 当 $a=1$ 时,(i) 当 $b\neq -1$ 时,方程组无解;(ii) 当 $b=-1$ 时,方程组有无穷多解,通解为 $(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=k_1(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(1,-2,0,1)^{\mathrm{T}}+(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$,其中 $k_1,k_2$ 为任意常数.

**十、填空题**

(1) $1-(1-p)^n$;$(1-p)^n+np(1-p)^{n-1}$.　(2) $\dfrac{53}{120}$;$\dfrac{20}{53}$.　(3) 1;$\dfrac{1}{2}$.

十一、$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{2}(1-e^{-z}), & 0<z\leqslant 2,\\ \dfrac{1}{2}(e^2-1)e^{-z}, & z>2.\end{cases}$

## (试卷 Ⅱ)

一、【同试卷 Ⅰ　第一题】.　二、(1) $2-6e^{-2}$.　(2)【同试卷 Ⅰ　第二题】.

三、$f_{11}''\cdot xe^{2y}+f_{13}''e^y+f_1'\cdot e^y+f_{21}''xe^y+f_{23}''$.

四、【同试卷 Ⅰ　第四题】.

五、【同试卷 Ⅰ　第五题】.

六、【同试卷 Ⅰ　第六题】.

七、【同试卷 Ⅰ　第七题】.

八、【同试卷 Ⅰ　第八题】.

九、【同试卷 Ⅰ　第九题】.

十、证明略.(反证法.)

# 1988 年真题参考答案

## （试卷 Ⅰ）

一、(1) $[0,6)$.　(2) $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}, x\leqslant 0$.　(3) $\frac{12\pi}{5}$.

**二、填空题**

(1) $(1+2t)e^{2t}$.　(2) $\frac{3}{2}$.　(3) $\frac{1}{12}$.　(4) 40.

**三、选择题**

(1) B.　(2) A.　(3) C.　(4) B.　(5) D.

四、0.　五、$y=(1-2x)e^{x}$.　六、$W=k\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

七、$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 6 & -1 & -1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{A}$.

八、(1) $x=0, y=1$; (2) $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

九、证明略.

**十、填空题**

(1) $\frac{1}{3}$.　(2) $\frac{17}{25}$（或 0.68）.　(3) 0.987 6.

十一、$f_Y(y)=\dfrac{3(1-y)^2}{\pi[1+(1-y)^6]}$.

## （试卷 Ⅱ）

一、【同试卷 Ⅰ　第一题】.　二、【同试卷 Ⅰ　第二题】.

三、【同试卷 Ⅰ　第三题】.

四、(1)【同试卷 Ⅰ　第四题】.　(2) $\frac{4}{\pi^3}(2+\pi)$.　(3) $x+2z=7$ 和 $x+4y+6z=21$.

五、【同试卷 Ⅰ　第五题】.　六、【同试卷 Ⅰ　第六题】.

七、【同试卷 Ⅰ　第七题】.　八、【同试卷 Ⅰ　第八题】.

九、【同试卷 Ⅰ　第九题】.

# 1989 年真题参考答案

## (试卷 Ⅰ)

### 一、填空题

(1) $-1$.　(2) $x-1$.　(3) $\pi$.　(4) 2.　(5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

### 二、选择题

(1) A.　(2) C.　(3) D.　(4) B.　(5) C.

三、(1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2f'' + xg''_{uv} + xyg''_{vv} + g'_v$.　(2) $\frac{1}{2}$.　(3) $\frac{\pi}{8}$.

四、$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, (-1 \leqslant x < 1)$.

五、$\frac{1}{2}\sin x + \frac{x}{2}\cos x$.

六、证明略.(可利用零点定理.)

七、$\lambda = 1$ 时,方程组有解;解为 $\boldsymbol{x} = k(-1, 2, 1)^{\mathrm{T}} + (1, -1, 0)^{\mathrm{T}}$,其中 $k$ 为任意常数.

八、证明略.(根据特征值与特征向量的定义.)

九、$\frac{4}{3}a$.

### 十、填空题

(1) 0.7.　(2) 0.75.　(3) $\frac{4}{5}$.

十一、$f_Z(z) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-5)^2}{18}}, -\infty < z < +\infty$.

## (试卷 Ⅱ)

一、【同试卷 Ⅰ　第一题】.

二、【同试卷 Ⅰ　第二题】.

三、【同试卷 Ⅰ　第三题】.

四、(1)【同试卷 Ⅰ　第四题】.　(2) $\left(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi}\right)$.　(3　证明略.(可利用高斯公式.)

五、【同试卷 Ⅰ　第五题】.

六、【同试卷 Ⅰ　第六题】.

七、【同试卷 Ⅰ　第七题】.

八、【同试卷 Ⅰ　第八题】.

九、【同试卷 Ⅰ　第九题】.

# 1990 年真题参考答案

## （试卷 Ⅰ）

**一、填空题**

（1）$x-3y-z+4=0$.　（2）$e^{2a}$.　（3）1.　（4）$\frac{1}{2}(1-e^{-4})$.　（5）2.

**二、选择题**　（1）A.　（2）A.　（3）C.　（4）D.　（5）B.

三、（1）$\frac{1}{3}\ln 2$.　（2）$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2f''_{11}+(2\sin x-y\cos x)f''_{12}+y\sin x\cos xf''_{22}+\cos xf'_2$.

（3）$y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\frac{x^2}{2}e^{-2x}$，其中 $C_1,C_2$ 为任意常数.

四、收敛域$(-1,1)$；$S(x)=\frac{1+x}{(1-x)^2}$，$-1<x<1$.

五、$12\pi$.　六、证明略.（可利用拉格朗日中值定理.）

七、$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$.

八、在正交变换$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{4}{3\sqrt{2}}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{3\sqrt{2}}&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{3\sqrt{2}}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$下，二次型为$f=9y_3^2$.

九、$2(\pi-1)$.

**十、填空题**

（1）$\begin{cases}\frac{1}{2}e^x, & x<0,\\1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$　（2）0.3.　（3）4.

十一、$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\0, & 其他.\end{cases}$　$D(Z)=\frac{2}{9}$.

## （试卷 Ⅱ）

一、【同试卷 Ⅰ　第一题】.　二、【同试卷 Ⅰ　第二题】.　三、【同试卷 Ⅰ　第三题】.

四、（1）【同试卷 Ⅰ　第四题】.　（2）$\frac{1}{2}\left(\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)$.　（3）$\frac{\pi}{6}$.

五、【同试卷 Ⅰ　第五题】.　六、【同试卷 Ⅰ　第六题】.　七、【同试卷 Ⅰ　第七题】.

八、【同试卷 Ⅰ　第八题】.　九、【同试卷 Ⅰ　第九题】.

# 1991 年真题参考答案

## (试卷 Ⅰ)

### 一、填空题

(1) $\dfrac{\sin t - t\cos t}{4t^3}$.　(2) $\mathrm{d}x - \sqrt{2}\mathrm{d}y$.　(3) $x - 3y + z + 2 = 0$.　(4) $-\dfrac{3}{2}$.

(5) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$.

### 二、选择题

(1) D.　(2) B.　(3) C.　(4) A.　(5) D.

三、(1) $e^{-\frac{\pi}{2}}$.　(2) $\dfrac{11}{7}$.　(3) $\dfrac{256}{3}\pi$.

四、$y = \sin x(0 \leqslant x \leqslant \pi)$.

五、$2 + |x| = \dfrac{5}{2} - \dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}, x \in [-1,1]$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

六、证明略.(可利用积分中值定理和罗尔定理.)

七、(1) $a = -1, b \neq 0$.　(2) $a \neq -1$, $\boldsymbol{\beta} = -\dfrac{2b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_1 + \dfrac{a+b+1}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_2 + \dfrac{b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_3 + 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_4$.

八、证明略.　九、$y = \dfrac{1}{2}(e^{x-1} + e^{-(x-1)})$.

### 十、填空题

(1) 0.2.　(2) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}$.

十一、$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant 0, \\ 1 - e^{-z} - ze^{-z}, & z > 0. \end{cases}$

## (试卷 Ⅱ)

一、【同试卷 Ⅰ　第一题】.

二、【同试卷 Ⅰ　第二题】.

三、【同试卷 Ⅰ　第三题】.

四、(1) $\dfrac{2}{3} - \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.　(2) $-8\pi$.　(3)【同试卷 Ⅰ　第四题】.

五、【同试卷 Ⅰ　第五题】.

六、【同试卷 Ⅰ　第六题】.

七、【同试卷 Ⅰ　第七题】.

八、【同试卷 Ⅰ　第八题】.

九、【同试卷 Ⅰ　第九题】.

# 1992 年真题参考答案

## (试卷 Ⅰ)

**一、填空题**

(1) $\dfrac{y\sin(xy)-e^{x+y}}{e^{x+y}-x\sin(xy)}$.  (2) $\left\{\dfrac{2}{9},\dfrac{4}{9},-\dfrac{4}{9}\right\}$.  (3) $\dfrac{\pi^2}{2}$.

(4) $(x+C)\cos x$，其中 $C$ 为任意常数.  (5) 1.

**二、选择题** (1) D. (2) C. (3) B. (4) C. (5) A.

三、(1) 1. (2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{11}e^{2x}\sin y\cos y+2e^x(y\sin y+x\cos y)f''_{12}+4xyf''_{22}+e^x\cos yf'_1$.

(3) $\dfrac{7}{3}-\dfrac{1}{e}$.

四、$y=C_1e^x+C_2e^{-3x}-\dfrac{1}{4}xe^{-3x}$，其中 $C_1,C_2$ 为任意常数.

五、$\dfrac{29}{20}\pi a^5$.

六、证明略.(可考虑函数 $F(x)=f(x+x_2)-f(x)$，计算 $F'(x)$，并利用 $F(x)$ 的单调性.)

七、$\xi=\dfrac{a}{\sqrt{3}},\ \eta=\dfrac{b}{\sqrt{3}},\ \zeta=\dfrac{c}{\sqrt{3}};\ W_{\max}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}abc$.

八、(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，证明略.  (2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，证明略.

九、(1) $\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\xi}_1-2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3$.  (2) $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{pmatrix}$.

**十、填空题** (1) $\dfrac{3}{8}$.  (2) $\dfrac{4}{3}$.

十一、$f_Z(z)=\dfrac{1}{2\pi}\left[\Phi\left(\dfrac{z+\pi-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{z-\pi-\mu}{\sigma}\right)\right]$，其中 $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$.

## (试卷 Ⅱ)

一、【同试卷 Ⅰ 第一题】.  二、【同试卷 Ⅰ 第二题】.

三、(1)【同试卷 Ⅰ 第三、(1) 题】. (2)【同试卷 Ⅰ 第三、(2) 题】. (3) $\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$.

四、(1)【同试卷 Ⅰ 第四题】. (2) $2x\displaystyle\int_0^{x^2}f(t)\,dt$. (3) $\dfrac{3}{8}e-\dfrac{1}{2}\sqrt{e}$.

五、【同试卷 Ⅰ 第五题】.  六、【同试卷 Ⅰ 第六题】.

七、【同试卷 Ⅰ 第七题】.  八、【同试卷 Ⅰ 第八题】.

九、【同试卷 Ⅰ 第九题】.

# 1993 年真题参考答案

## (试卷 Ⅰ)

**一、填空题**

(1) $\left(0, \frac{1}{4}\right)$. (2) $\left\{0, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right\}$. (3) $\frac{2}{3}\pi$. (4) $\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$. (5) $k(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$,其中 $k$ 为任意常数.

**二、选择题**

(1) B. (2) A. (3) C. (4) B. (5) C.

三、(1) $\mathrm{e}^2$. (2) $2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-4\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+4\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C$,其中 $C$ 为任意常数.

(3) $y=\frac{2x}{1+x^2}$.

四、$\frac{\pi}{2}$. 五、$\frac{22}{27}$.

六、(1) 证明略.(可利用零点定理.)

(2) 证明略.(可考虑函数 $f(x)=x\ln a-a\ln x$,计算 $f'(x)$,并利用 $f(x)$ 的单调性.)

七、$a=2$;正交矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

八、证明略.(可证明 $r(\boldsymbol{B})=n$.)

九、$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}=0$,初始条件为 $y(-1)=0$, $y'(-1)=1$.

**十、填空题**

(1) $\frac{1}{6}$. (2) $\frac{1}{4\sqrt{y}}$.

十一、(1) $E(X)=0, D(X)=2$. (2) $\operatorname{Cov}(X,|X|)=0$,$X$ 和 $|X|$ 不相关.

(3) $X$ 和 $|X|$ 不独立,证明略.

## (试卷 Ⅱ)

一、【同试卷 Ⅰ 第一题】. 二、【同试卷 Ⅰ 第二题】. 三、【同试卷 Ⅰ 第三题】.

四、(1) $\frac{\partial z}{\partial y}=x^4f_1'+x^2f_2'$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^5f_{11}''+2x^3f_{12}''+xf_{22}''$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4x^3f_1'+2xf_2'+x^4yf_{11}''-yf_{22}''$.

(2)【同试卷 Ⅰ 第四题】. (3) $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

五、【同试卷 Ⅰ 第五题】. 六、【同试卷 Ⅰ 第六题】. 七、【同试卷 Ⅰ 第七题】.

八、【同试卷 Ⅰ 第八题】. 九、【同试卷 Ⅰ 第九题】.

# 1994 年真题参考答案

## (试卷 Ⅰ)

**一、填空题**

(1) $\frac{1}{6}$. (2) $2x+y-4=0$. (3) $\left(\frac{\pi}{e}\right)^2$. (4) $\frac{\pi R^4}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$. (5) $3^{n-1}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$.

**二、选择题**

(1) D. (2) D. (3) C. (4) D. (5) C.

三、(1) $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. (2) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}(-1<x<1)$.

(3) $\frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$,其中 $C$ 为任意常数.

四、$\frac{1}{2}\pi^2R$.

五、$f(x)=2\cos x+\sin x+x^2-2$,通解为 $-2y\sin x+y\cos x+\frac{x^2y^2}{2}+2xy=C$,其中 $C$ 为任意常数.

六、证明略.(可写出 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的一阶泰勒展开式,并证明 $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$,其中 $M$ 为一正常数.)

七、$\frac{2}{3}\pi$.

八、(1)$(0,0,1,0)$,$(-1,1,0,1)$. (2) 有非零公共解 $k(-1,1,1,1)$,其中 $k$ 为任意非零常数.

九、证明略.(反证法.)

**十、填空题**

(1) $1-p$. (2)

| $Z$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $p$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{4}$ |

十一、(1) $E(Z)=\frac{1}{3}$,$D(Z)=3$. (2) $\rho_{XZ}=0$. (3) $X$ 和 $Z$ 相互独立,证明略.

## (试卷 Ⅱ)

一、【同试卷 Ⅰ 第一题】. 二、【同试卷 Ⅰ 第二题】. 三、【同试卷 Ⅰ 第三题】.

四、(1) $\left(\frac{8}{5},\frac{3}{5}\right)$. (2)【同试卷 Ⅰ 第四题】.

五、【同试卷 Ⅰ 第五题】. 六、【同试卷 Ⅰ 第六题】. 七、【同试卷 Ⅰ 第七题】.

八、(1) $-[(2n-3)!!]$. (2)【同试卷 Ⅰ 第八题】. 九、【同试卷 Ⅰ 第九题】.

# 1995 年真题参考答案

## (试卷 Ⅰ)

**一、填空题**

(1) $e^6$. (2) $-\int_0^{x^2}\cos(t^2)\mathrm{d}t-2x^2\cos(x^4)$. (3) 4. (4) $\sqrt{3}$. (5) $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

**二、选择题**

(1) C. (2) B. (3) A. (4) C. (5) C.

三、(1) $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cos x-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{1}{\varphi_3'}(2x\varphi_1'+e^{\sin x}\cos x\cdot\varphi_2')$. (2) $\frac{1}{2}A^2$.

四、(1) $\frac{32}{9}\sqrt{2}$. (2) $f(x)=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}$, $x\in[0,2]$.

五、$y=\sqrt{3x-x^2}(0<x<3)$. 六、$Q(x,y)=x^2+2y-1$.

七、(1) 证明略.(反证法.)

(2) 证明略.(可考虑函数 $\varphi(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$,对 $\varphi(x)$ 使用罗尔定理.)

八、$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$. 九、0.

**十、填空题** (1) 18.4. (2) $\frac{5}{7}$.

十一、$f_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ \frac{1}{y^2}, & y\geqslant 1.\end{cases}$

## (试卷 Ⅱ)

一、【同试 Ⅰ 第一题】. 二、【同试卷 Ⅰ 第二题】.

三、(1)【同试卷 Ⅰ 第三、(1) 题】. (2) $2x+2y-z-3=0$. (3) $\frac{2}{15}(4\sqrt{2}-1)$.

四、【同试卷 Ⅰ 第四题】. 五、【同试卷 Ⅰ 第五题】. 六、【同试卷 Ⅰ 第六题】.

七、【同试卷 Ⅰ 第七题】.

八、(1) $a\neq 2$ 时,方程组有解,其通解为 $\boldsymbol{x}=k(-3,0,1,1)^{\mathrm{T}}+\left(\frac{7a-10}{a-2},\frac{2-2a}{a-2},\frac{1}{a-2},0\right)^{\mathrm{T}}$,其中 $k$ 为任意常数.

(2)【同试卷 Ⅰ 第八题】.

九、【同试卷 Ⅰ 第九题】.

# 1996 年真题参考答案

## （试卷 Ⅰ）

**一、填空题**

(1) $\ln 2$.　(2) $2x+2y-3z=0$.

(3) $y=e^{x}(C_1\cos x+C_2\sin x+1)$，其中 $C_1, C_2$ 为任意常数.　(4) $\frac{1}{2}$.　(5) 2.

**二、选择题**

(1) D.　(2) B.　(3) A.　(4) C.　(5) D.

三、(1) $8a$.

(2) 证明略（可用数学归纳法证明 $\{x_n\}$ 单调减少，再由单调有界准则知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在）. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=3$.

四、(1) $-\frac{1}{2}\pi$.　(2) 3.

五、$\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2$.

六、$f(x)=C_1\ln x+C_2$，其中 $C_1, C_2$ 为任意常数.

七、(1) $f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$，其中 $\xi=c+\theta(x-c)$，$0<\theta<1$.

(2) 证明略.（利用 $f(x)$ 的一阶泰勒公式.）

八、(1) 证明略.　(2) 证明略.（反证法.）

九、(1) $c=3$，$\lambda_1=0$，$\lambda_2=4$，$\lambda_3=9$.　(2) 椭圆柱面.

十、填空题　(1) $\frac{3}{7}$.　(2) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

十一、(1)

| Y \ X | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1/9 | 2/9 | 2/9 |
| 2 | 0 | 1/9 | 2/9 |
| 3 | 0 | 0 | 1/9 |

(2) $E(X)=\frac{22}{9}$.

## （试卷 Ⅱ）

一、【同试卷 Ⅰ　第一题】.　二、【同试卷 Ⅰ　第二题】.

三、(1) $\frac{10}{9}\sqrt{2}$.　(2)【同试卷 Ⅰ　第三、(1) 题】.　(3)【同试卷 Ⅰ　第三、(2) 题】.

四、【同试卷 Ⅰ　第四题】.　五、【同试卷 Ⅰ　第五题】.　六、【同试卷 Ⅰ　第六题】.

七、【同试卷 Ⅰ　第七题】.

八、(1) 基础解系为 $\xi_1=(-1,0,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\xi_2=(1,-1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$.

(2)【同试卷 Ⅰ　第八题】.

九、【同试卷 Ⅰ　第九题】.

# 1997 年真题参考答案

## 一、填空题

(1) $\frac{3}{2}$. (2) $(-2, 4)$. (3) $x + y = e^{\frac{\pi}{2}}$. (4) $-3$. (5) $\frac{2}{5}$.

## 二、选择题

(1) C. (2) B. (3) A. (4) D. (5) D.

三、(1) $\frac{1024}{3}\pi$. (2) $-2\pi$. (3) $x = \dfrac{Nx_0 e^{kNt}}{N - x_0 + x_0 e^{kNt}}$.

四、(1) $a = -5$, $b = -2$. (2) $f(u) = C_1 e^u + C_2 e^{-u}$，其中 $C_1, C_2$ 为任意常数.

五、$\varphi'(x) = \begin{cases} \dfrac{xf(x) - \int_0^x f(u)\,du}{x^2}, & x \neq 0, \\ \dfrac{A}{2}, & x = 0, \end{cases}$ $\varphi'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

六、(1) 证明略. (证明数列 $\{a_n\}$ 单调递减且有下界.)

(2) 证明略. (级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ 收敛，可使用比较审敛法.)

七、(1) 标准正交基为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1, 1, 2, 3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \frac{1}{\sqrt{39}}(-2, 1, 5, -3)^{\mathrm{T}}$.

(2)(Ⅰ) $a = -3$, $b = 0$, $\lambda = -1$. (Ⅱ) $\boldsymbol{A}$ 不能相似于对角阵，证明略.

八、(1) 证明略. (2) $\boldsymbol{E}_{ij}$.

九、$X$ 的分布律为

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | $\frac{27}{125}$ | $\frac{54}{125}$ | $\frac{36}{125}$ | $\frac{8}{125}$ |

$X$ 的分布函数为 $F(x) = P\{X \leqslant x\} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{27}{125}, & 0 \leqslant x < 1, \\ \frac{81}{125}, & 1 \leqslant x < 2, \\ \frac{117}{125}, & 2 \leqslant x < 3, \\ 1, & x \geqslant 3. \end{cases}$

$X$ 的数学期望为 $E(X) = \frac{6}{5}$.

十、$\theta$ 的矩估计量为 $\hat{\theta} = \dfrac{2\bar{X} - 1}{1 - \bar{X}}$，$\theta$ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta} = -1 - \dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \ln X_i}$.

# 1998 年真题参考答案

**一、填空题**

(1) $-\frac{1}{4}$.　(2) $yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)$.　(3) $12a$.　(4) $\left(\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\right)^2+1$.　(5) $\frac{1}{4}$.

**二、选择题**

(1) A.　(2) B.　(3) D.　(4) A.　(5) C.

三、$l_0$ 的方程为$\begin{cases} x-y+2z-1=0, \\ x-3y-2z+1=0. \end{cases}$

曲面的方程为 $4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$.

四、$u(x,y)=-\arctan\frac{y}{x^2}+C$,其中 $C$ 为任意常数.

五、$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=mg-B\rho-kv$;$y=-\frac{m}{k}v-\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln\frac{mg-B\rho-kv}{mg-B\rho}$.

六、$-\frac{\pi}{2}a^3$.

七、$\frac{2}{\pi}$.

八、收敛,证明略.

九、(1) 证明略.　(2) 证明略.

十、$a=3$, $b=1$;$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

十一、证明略.

十二、(Ⅱ) 的通解为 $y=c_1(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1,2n})^{\mathrm{T}}+c_2(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2,2n})^{\mathrm{T}}+\cdots+c_n(a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{n,2n})^{\mathrm{T}}$,其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为任意常数,理由略.

十三、$1-\frac{2}{\pi}$.

十四、$n$ 至少应取 35.

十五、可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分,检验过程略.

# 1999 年真题参考答案

## 一、填空题

(1) $\dfrac{1}{3}$.　(2) $\sin(x^2)$.

(3) $C_1\mathrm{e}^{-2x}+\left(C_2+\dfrac{x}{4}\right)\mathrm{e}^{2x}$,其中 $C_1,C_2$ 为任意常数.

(4) $n,0,\cdots,0,0$ 为 $n-1$ 重特征值.

(5) $\dfrac{1}{4}$.

## 二、选择题

(1) A.　(2) D.　(3) C.　(4) B.　(5) B.

三、$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{(f+xf')F'_y-xf'F'_x}{F'_y+xf'F'_z}$, 这里的 $f$ 指 $f(x+y)$,$(F'_y+xf'F'_z\neq 0)$.

四、$\left(\dfrac{\pi}{2}+2\right)a^2b-\dfrac{\pi}{2}a^3$.

五、$y=\mathrm{e}^x$.

六、证明略.(可考虑函数 $\varphi(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$,计算 $\varphi'(x)$,并利用 $\varphi(x)$ 的单调性.)

七、91500 J.

八、$\dfrac{3}{2}\pi$.

九、(1) 1.　(2) 证明略.(证明$\dfrac{a_n}{n^\lambda}<\dfrac{1}{n^{\lambda+1}}$,并利用比较审敛法.)

十、$a=2,\ b=-3,\ c=2,\ \lambda_0=1$.

十一、证明略.

十二、

| $X \backslash Y$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\dfrac{1}{24}$ | $\dfrac{1}{8}$ | $\dfrac{1}{12}$ | $\dfrac{1}{4}$ |
| $x_2$ | $\dfrac{1}{8}$ | $\dfrac{3}{8}$ | $\dfrac{1}{4}$ | $\dfrac{3}{4}$ |
| $P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}$ | $\dfrac{1}{6}$ | $\dfrac{1}{2}$ | $\dfrac{1}{3}$ | 1 |

十三、(1) $\theta$ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=2\overline{X}$.

(2) $\hat{\theta}=2\overline{X}$ 的方差为 $D(\hat{\theta})=\dfrac{\theta^2}{5n}$.

# 2000 年真题参考答案

## 一、填空题

(1) $\frac{\pi}{4}$.　(2) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-2}{6}$.　(3) $y=C_1+\frac{C_2}{x^2}$,其中 $C_1,C_2$ 为任意常数.

(4) $-1$.　(5) $\frac{2}{3}$.

## 二、选择题

(1) A.　(2) C.　(3) D.　(4) D.　(5) B.

三、1.

四、$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'-\frac{1}{y^2}f_2'+xyf_{11}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''$.

五、. $\pi$

六、$f(x)=\frac{e^x}{x}(e^x-1)$.

七、收敛区间为$(-3,3)$. 当 $x=3$ 时,原级数发散,当 $x=-3$ 时,原级数收敛.

八、以所考虑的球体的球心为原点,射线 $OP_0$ 为 $x$ 轴正向建立直角坐标系,球体 $\Omega$ 的重心位置为 $\left(-\frac{R}{4},0,0\right)$.

九、证明略.(可考虑函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,对 $F(x)$ 使用罗尔定理.)

十、$\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{pmatrix}$.

十一、(1) 关系式为$\begin{cases}x_{n+1}=\frac{9}{10}x_n+\frac{2}{5}y_n,\\ y_{n+1}=\frac{1}{10}x_n+\frac{3}{5}y_n,\end{cases}$ 矩阵形式为$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{10}&\frac{2}{5}\\\frac{1}{10}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$.

(2) $\boldsymbol{A\eta}_1=\boldsymbol{\eta}_1$,$\boldsymbol{\eta}_1$ 对应的特征值为 $\lambda_1=1$;$\boldsymbol{A\eta}_2=\frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}_2$,$\boldsymbol{\eta}_2$ 对应的特征值为 $\lambda_2=\frac{1}{2}$.

(3) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix}8-3\left(\frac{1}{2}\right)^n\\2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}$.

十二、$E(X)=\frac{1}{p}$,$D(X)=\frac{1-p}{p^2}$.

十三、$\hat{\theta}=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.

# 2001 年真题参考答案

## 一、填空题

(1) $y'' - 2y' + 2y = 0$.　(2) $\frac{2}{3}$.　(3) $\int_1^2 dx\int_0^{1-x} f(x, y)dy$.　(4) $\frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E})$.　(5) $\frac{1}{2}$.

## 二、选择题

(1) D.　(2) C.　(3) B.　(4) A.　(5) A.

三、$-\frac{1}{2}(e^{-2x}\arctan e^x + e^{-x} + \arctan e^x) + C$,其中 $C$ 为任意常数.

四、51.

五、$f(x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}x^{2n}$, $x \in [-1, 1]$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

六、$-24$.

七、(1) 证明略.(可利用拉格朗日中值定理.)

(2) 证明略.(可利用 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的泰勒公式.)

八、100 小时.

九、当 $s$ 为偶数,$t_1 \neq \pm t_2$;$s$ 为奇数,$t_1 \neq -t_2$ 时,$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 也是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

十、(1) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.　(2) $-4$.

十一、(1) $C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, $0 \leqslant m \leqslant n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$.

(2) $P\{X = n, Y = m\} = C_n^m p^m(1-p)^{n-m} \cdot \frac{e^{-\lambda}}{n!}\lambda^n$, $0 \leqslant m \leqslant n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$.

十二、$E(Y) = 2(n-1)\sigma^2$.

# 2002 年真题参考答案

## 一、填空题

(1) 1.　(2) $-2$.　(3) $y=\sqrt{x+1}$.　(4) 2.　(5) 4.

## 二、选择题

(1) A.　(2) C.　(3) B.　(4) B.　(5) D.

三、$a=2$，$b=-1$.

四、2.

五、$\mathrm{e}-1$.

六、(1) 证明略.(证明$\dfrac{\partial}{\partial y}\left\{\dfrac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\right\}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\dfrac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\right\}$.)

(2) $\dfrac{c}{d}-\dfrac{a}{b}$.

七、(1) 证明略.(分别计算 $y'$，$y''$,代入所证等式.)

(2)$y(x)=\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{x}(-\infty<x<+\infty)$.

八、(1) 当函数$h(x,y)$以及点$M(x_0,y_0)$给定时,$h(x,y)$在点$M$处的各个方向的方向导数的最大值为$g(x_0,y_0)=\sqrt{5x_0^2+5y_0^2-8x_0y_0}$.

(2) 点 $M_1(5,-5)$ 或点 $M_2(-5,5)$ 可作为攀登的起点.

九、$\boldsymbol{x}=(0,3,0,1)^{\mathrm{T}}+k(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$,其中 $k$ 为任意常数.

十、(1) 证明略.(利用 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.)

(2)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

(3) 证明　.

十一、5.

十二、$\theta$ 的矩估计值为$\dfrac{1}{4}$,$\theta$ 的极大似然估计值为$\dfrac{1}{12}(7-\sqrt{13})$.

# 2003 年真题参考答案

## 一、填空题

(1) $\frac{1}{\sqrt{e}}$. (2) $2x+4y-z-5=0$. (3) 1. (4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. (5 $\frac{1}{4}$. (6) (39.51, 40.49).

## 二、选择题

(1) C. (2) D. (3) A. (4) D. (5) B. (6) C.

三、(1) 面积 $A=\frac{1}{2}e-1$.

(2) 体积 $V=\frac{\pi}{6}(5e^2-12e+3)$.

四、$f(x)=\frac{\pi}{4}-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}x^{2n+1}$, $x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$.

五、(1) 证明略.

(2) 证明略.

六、(1) $\sqrt{1+r+r^2}a$ m.

(2) $\frac{a}{\sqrt{1-r}}$ m.

七、(1) $y''-y=\sin x$.

(2) $y=e^x-e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x$.

八、(1) 当 $t\in(0,+\infty)$ 时, $F(t)$ 严格单调增加.

(2) 证明略.

九、特征值分别为9,9,3. 属于二重特征值9的全体特征向量为 $k_1(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-2,0,1)^{\mathrm{T}}$,其中 $k_1$, $k_2$ 为不同时为零的任意常数;属于特征值3的全体特征向量为 $k_3(0,1,1)^{\mathrm{T}}$,其中 $k_3$ 为任意非零常数.

十、证明略.(三条平面直线交于一点的充分必要条件为联立三条直线方程所得线性方程组有唯一解.)

十一、(1) $\frac{3}{2}$. (2) $\frac{1}{4}$.

十二、(1) $F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant\theta,\\ 1-e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta.\end{cases}$

(2) $F_{\hat{\theta}}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant\theta,\\ 1-e^{-2n(x-\theta)}, & x>\theta.\end{cases}$

(3) $\theta$ 的估计　不具有无偏性.

# 2004 年真题参考答案

## 一、填空题

(1) $y=x-1$.　(2) $\frac{1}{2}(\ln x)^2$.　(3) $\frac{3}{2}\pi$.　(4) $y=\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}$,其中 $C_1,C_2$ 为任意常数.

(5) $\frac{1}{9}$.　(6) $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

## 二、选择题

(7) B.　(8) C.　(9) B.　(10) B.　(11) D.　(12) A.　(13) C.　(14) A.

## 三、解答题

(15) 证明略.(可考虑函数 $\varphi(x)=\ln^2 x-\frac{4}{\mathrm{e}^2}x$,计算 $\varphi'(x)$,并利用 $\varphi(x)$ 的单调性.)

(16) 1.05 km.

(17) $-\pi$.

(18) 证明略.(证明 $x_n^{\alpha}<\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$,使用比较审敛法.)

(19) 点$(9,3)$是函数 $z(x,y)$ 的极小值点,极小值为 3,点$(-9,-3)$是函数 $z(x,y)$ 的极大值点,极大值为 $-3$.

(20) 当 $a=0$ 或 $a=-\frac{n(n+1)}{2}$ 时,方程组有非零解.

当 $a=0$ 时,方程组的通解为

$$k_1(1,-1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}+k_2(1,0,-1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}+\cdots+k_{n-1}(1,0,0,\cdots,-1)^{\mathrm{T}},$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}$ 为任意常数.

当 $a=-\frac{n(n+1)}{2}$ 时,方程组的通解为 $k(1,2,3,\cdots,n)^{\mathrm{T}}$,其中 $k$ 为任意常数.

(21) 当 $a=-2$ 和 $a=-\frac{2}{3}$ 时,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有二重特征值,当 $a=-2$ 时,$\boldsymbol{A}$ 可相似对角化,当 $a=-\frac{2}{3}$ 时,$\boldsymbol{A}$ 不可相似对角化.

(22) (Ⅰ)

| $X$ \ $Y$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{12}$ |
| 1 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{12}$ |

(Ⅱ) $\frac{\sqrt{15}}{15}$.

(23) (Ⅰ) $\beta$ 的矩估计量为 $\hat{\beta}=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$.

(Ⅱ) $\beta$ 的最大似然估计量 $\hat{\beta}=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

# 2005 年真题参考答案

## 一、填空题

(1) $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$. (2) $y=\frac{x}{3}\left(\ln x-\frac{1}{3}\right)$. (3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. (4) $(2-\sqrt{2})\pi R^3$. (5) 2. (6) $\frac{13}{48}$.

## 二、选择题

(7) C. (8) A. (9) B. (10) D. (11) B. (12) C. (13) B. (14) D.

## 三、解答题

(15) $\frac{3}{8}$.

(16) 收敛区间为$(-1,1)$; $f(x)=2x\arctan x-\ln(1+x^2)+\frac{x^2}{1+x^2}$, $x\in(-1,1)$.

(17) 20.

(18) (Ⅰ) 证明略.(考虑函数 $g(x)=f(x)+x-1$,可利用介值定理.)

(Ⅱ) 证明略.(可利用拉格朗日中值定理.)

(19) (Ⅰ) 证明略.

(Ⅱ) $\varphi(y)=-y^2$.

(20) (Ⅰ) 0.

(Ⅱ) $f(x_1,x_2,x_3)=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2=2y_1^2+2y_2^2$.

(Ⅲ) $\boldsymbol{x}=k(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$,其中 $k$ 为任意常数.

(21) 当 $k\neq9$ 时,$\boldsymbol{x}=k_1(1,2,3)^{\mathrm{T}}+k_2(3,6,k)^{\mathrm{T}}$,其中 $k_1$, $k_2$ 为任意常数. 当 $k=9$ 时,若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2,则通解为 $\boldsymbol{x}=k_1(1,2,3)^{\mathrm{T}}$,其中 $k_1$ 为任意常数;若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 1,则通解为 $\boldsymbol{x}=k_1(-b,a,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-c,0,a)^{\mathrm{T}}$,其中 $k_1$, $k_2$ 为任意常数.

(22) (Ⅰ) $f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

$$f_Y(y)=\begin{cases}1-\frac{y}{2}, & 0<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅱ) $f_Z(z)=\begin{cases}1-\frac{z}{2}, & 0<z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(23) (Ⅰ) $\frac{n-1}{n}$, $(i=1,2,\cdots,n)$.

(Ⅱ) $-\frac{1}{n}$.

# 2006 年真题参考答案

## 一、填空题

(1) 2. (2) $y = Cxe^{-x}$,其中 $C$ 为任意常数. (3) $2\pi$. (4) $\sqrt{2}$. (5) 2. (6) $\frac{1}{9}$.

## 二、选择题

(7) A. (8) C. (9) D. (10) D. (11) A. (12) B. (13) C. (14) A.

## 三、解答题

(15) $\frac{\pi}{2}\ln 2$.

(16) (Ⅰ) 证明略(可利用数学归纳法证明 $\{x_n\}$ 单调下降且有界), $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

(Ⅱ) $e^{-\frac{1}{6}}$.

(17) $f(x) = \frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n} - (-1)^n\right]x^n, \ |x| < 1$.

(18) (Ⅰ) 证明略.

(Ⅱ) $f(u) = \ln u$.

(19) 证明略.(可利用格林公式.)

(20) (Ⅰ) 证明略.(分别证明 $r(\boldsymbol{A}) \geqslant 2$ 和 $r(\boldsymbol{A}) \leqslant 2$.)

(Ⅱ) $a = 2, b = -3$,通解为 $\boldsymbol{x} = k_1(-2, 1, 1, 0)^{\mathrm{T}} + k_2(4, -5, 0, 1)^{\mathrm{T}} + (2, -3, 0, 0)^{\mathrm{T}}$,其中 $k_1, k_2$ 为任意常数.

(21) (Ⅰ) $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0,0,3,对应于特征值 0 的全体特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2$,其中 $k_1, k_2$ 为不全为零的任意常数,对应于特征值 3 的全体特征向量为 $k_3(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$,其中 $k_3$ 为任意非零常数.

(Ⅱ) $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵,满足 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$.

(22) (Ⅰ) $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0 < y < 1, \\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1 \leqslant y < 4, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

(Ⅱ) $F\left(-\frac{1}{2}, 4\right) = \frac{1}{4}$.

(23) $\hat{\theta} = \frac{N}{n}$.

# 2007 年真题参考答案

## 一、选择题

(1)B.　(2)D.　(3)C.　(4)D.　(5)D.　(6)B.　(7)A.　(8)B.　(9)C.　(10)A.

## 二、填空题

(11) $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}$.　(12) $f'_1 \cdot yx^{y-1} + f'_2 \cdot y^x \ln y$.　(13) $C_1e^x + C_2e^{3x} - 2e^{2x}$.　(14) $\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

(15)1.　(16) $\frac{3}{4}$.

## 三、解答题

(17) $f(x,y)$ 在 $D$ 上的最大值为 8,最小值为 0.

(18) $I = \pi$.

(19) 证明略.

(20) (Ⅰ) 证明略;

(Ⅱ) $y(x) = xe^{x^2}$.

(21) 当 $a = 1$ 时,公共解为 $\boldsymbol{x} = c(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$,$c$ 为任意常数;当 $a = 2$ 时,公共解为 $\boldsymbol{x} = (0,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

(22)(Ⅰ) $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值为 $-2,1,1$,$\boldsymbol{B}$ 的对应于特征值 $-2$ 的特征向量为 $c_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$,$c_1$ 为任意非零常数,$\boldsymbol{B}$ 的对应于特征值 1 的特征向量为 $c_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$,$c_2,c_3$ 为任意常数且不同时为 0;

(Ⅱ) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\1 & 0 & 1\\-1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

(23) (Ⅰ) $P\{X > 2Y\} = \frac{7}{24}$;

(Ⅱ) $f_Z(z) = \begin{cases}2z - z^2, & 0 < z \leqslant 1,\\ z^2 - 4z + 4, & 1 < z \leqslant 2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(24) (Ⅰ) $\hat{\theta} = 2\overline{X} - \frac{1}{2}$;

(Ⅱ) $4\overline{X}^2$ 不是 $\theta^2$ 的无偏估计量.

# 2008 年真题参考答案

## 一、选择题

(1)B.　(2)A.　(3)D.　(4)B.　(5)C.　(6)B.　(7)A.　(8)D.

## 二、填空题

(9) $\frac{1}{x}$.　(10) $y = x + 1$.　(11) $(1,5]$.　(12) $4\pi$.　(13) 1.　(14) $\frac{1}{2e}$.

## 三、解答题

(15) $\frac{1}{6}$.

(16) $-\frac{\pi^2}{2}$.

(17) 曲线 $C$ 上距离 $xOy$ 面最远的点为$(-5,-5,5)$，最近的点为$(1,1,1)$.

(18) 证明略.

(19) $f(x) = 1 - \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4}{n^2}\cos nx, 0 \leqslant x \leqslant \pi$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

(20) 证明略.

(21) (Ⅰ) 证明略;

(Ⅱ) $a \neq 0, x_1 = \frac{n}{(n+1)a}$;

(Ⅲ) $a = 0, \boldsymbol{x} = c(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}} + (0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$c$ 为任意常数.

(22) (Ⅰ) $P\left\{Z \leqslant \frac{1}{2} \middle| X = 0\right\} = \frac{1}{2}$;

(Ⅱ) $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & -1 \leqslant z < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

(23) (Ⅰ) 证明略;

(Ⅱ) $D(T) = \frac{2}{n(n-1)}$.

# 2009 年真题参考答案

## 一、选择题

(1)A.　(2)A.　(3)D.　(4)C.　(5)A.　(6)B.　(7)C.　(8)B.

## 二、填空题

(9)$xf''_{12}+f'_2+xyf''_{22}$.　(10)$-xe^x+x+2$.　(11)$\frac{13}{6}$.　(12)$\frac{4}{15}\pi$.　(13)2.　(14)$-1$.

## 三、解答题

(15)极小值$f\left(0,\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$.

(16)$S_1=\frac{1}{2}$,$S_2=1-\ln 2$.

(17)(Ⅰ)椭球面 $S_1$ 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2+z^2}{3}=1$,圆锥面 $S_2$ 的方程为 $y^2+z^2=\frac{1}{4}(x-4)^2$;

(Ⅱ)$V=\pi$.

(18)证明略.

(19)$I=4\pi$.

(20)(Ⅰ)$\boldsymbol{\xi}_2=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)^{\mathrm{T}}+c\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)^{\mathrm{T}}$,或$\boldsymbol{\xi}_2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}c,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}c,c\right)^{\mathrm{T}}$,$c$ 为任意常数.

$\boldsymbol{\xi}_3=\left(-\frac{1}{2},0,0\right)^{\mathrm{T}}+c_1(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+c_2(0,0,1)^{\mathrm{T}}$,或$\boldsymbol{\xi}_3=\left(-\frac{1}{2}-c_1,c_1,c_2\right)^{\mathrm{T}}$,$c_1,c_2$为任意常数.

(Ⅱ)证明略.

(21)(Ⅰ)$\lambda_1=a,\lambda_2=a+1,\lambda_3=a-2$;(Ⅱ)$a=2$.

(22)(Ⅰ)$P\{X=1\mid Z=0\}=\frac{4}{9}$;

(Ⅱ)二维随机变量$(X,Y)$的概率分布为

| $Y$ \ $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{36}$ |
| 1 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{9}$ | 0 |
| 2 | $\frac{1}{9}$ | 0 | 0 |

(23)(Ⅰ)$\lambda$ 的矩估计量为 $\hat{\lambda}=\frac{2}{\overline{X}}$;(Ⅱ)$\lambda$ 的最大似然估计量为 $\hat{\lambda}=\frac{2}{\overline{X}}$.