1987 年全国硕士研究生招生考试试题

【编者注】1987 年到 1996 年的数学试卷Ⅳ、Ⅴ均为现在的数学三.

（试卷Ⅳ）

一、判断题（本题共 5 小题，每小题 2 分，满分 10 分）

（1）$\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$.

（2）$\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x\,dx = 0$.

（3）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 均发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ 必发散.

（4）假设 D 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 r 阶子式，且 $D \neq 0$，但含 D 的一切 $r+1$ 阶子式都等于 0，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一切 $r+1$ 阶子式都等于 0.

（5）连续型随机变量取任何给定实数值的概率均为零.

二、选择题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，满分 10 分）

（1）下列函数在其定义域内连续的是（　　）

（A）$f(x) = \ln x + \sin x$.

（B $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leqslant 0, \\ \cos x, & x > 0. \end{cases}$

（C）$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x-1, & x > 0. \end{cases}$

（D）$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

（2）若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导且 $a < x_1 < x_2 < b$，则至少存在一点 ξ，使得（　　）

（A）$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a) \quad (a < \xi < b)$.

（B）$f(b) - f(x_1) = f'(\xi)(b-x_1) \quad (x_1 < \xi < b)$.

（C）$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2-x_1) \quad (x_1 < \xi < x_2)$.

（D）$f(x_2) - f(a) = f'(\xi)(x_2-a) \quad (a < \xi < x_2)$.

（3）下列广义积分收敛的是（　　）

（A）$\int_e^{+\infty} \dfrac{\ln x}{x}dx$.　（B）$\int_e^{+\infty} \dfrac{1}{x\ln x}dx$.　（C）$\int_e^{+\infty} \dfrac{1}{x(\ln x)^2}dx$.　（D）$\int_e^{+\infty} \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$.

（4）设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A}) = r < n$，那么在 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个行向量中（　　）

（A）必有 r 个行向量线性无关.

（B）任意 r 个行向量都线性无关.

（C）任意 r 个行向量都构成极大线性无关向量组.

（D）任意一个行向量都可以由其他 r 个行向量线性表示.

（5）若两事件 A 和 B 同时出现的概率 $P(AB) = 0$，则（　　）

（A）A 和 B 不相容（互斥）.　（B）AB 是不可能事件.

（C）AB 未必是不可能事件.　（D）$P(A) = 0$ 或 $P(B) = 0$.

三、计算下列各题(每小题 4 分,满分 16 分)

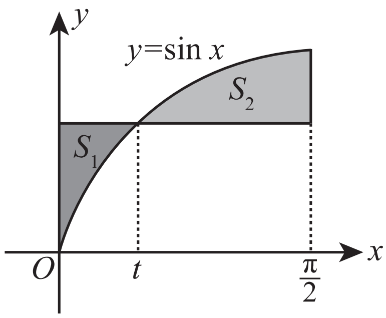
(1) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+xe^x)^{\frac{1}{x}}$.

(2) 设 $y=\ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}$,求 y'.

(3) 设 $z=\arctan\dfrac{x+y}{x-y}$,求 dz.

(4) 求不定积分$\int e^{\sqrt{2x-1}}dx$.

四、(本题满分 10 分)



考虑函数 $y=\sin x, 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.问:

(1) t 取何值时,右图中阴影部分的面积 S_1 与 S_2 之和 $S=S_1+S_2$ 最小?

(2) t 取何值时,面积 $S=S_1+S_2$ 最大?

五、(本题满分 6 分)

将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ 展开成 x 的幂级数,并指出收敛区间.

六、(本题满分 5 分)

计算二重积分$\iint\limits_D e^{x^2}dxdy$,其中 D 是第一象限中由直线 $y=x$ 和曲线 $y=x^3$ 围成的封闭区域.

七、(本题满分 6 分)

已知某商品的需求量 x 对价格 p 的弹性 $\eta=-3p^3$,而市场对该商品的最大需求量为 1(万件).求需求函数.

八、(本题满分 8 分)

解线性方程组
$$\begin{cases}2x_1-x_2+4x_3-3x_4=-4,\\ x_1+x_3-x_4=-3,\\ 3x_1+x_2+x_3=1,\\ 7x_1+7x_3-3x_4=3.\end{cases}$$

九、(本题满分 7 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$,求矩阵 $\boldsymbol{B}$,其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$.

十、(本题满分 6 分)

求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 4\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 的实特征值与对应的特征向量.

十一、(本题共 2 小题,每小题 4 分,满分 8 分)

(1) 已知随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=0.2$, $P\{X=2\}=0.3$, $P\{X=3\}=0.5$,试写出 X 的分布函数 $F(x)$.

(2) 已知随机变量 Y 的概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{y}{a^2}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2a^2}}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0,\end{cases}$$

求随机变量 $Z=\dfrac{1}{Y}$ 的数学期望 $E(Z)$.

十二、(本题满分 8 分)

假设有两箱同种零件:第一箱内装 50 件,其中 10 件一等品;第二箱内装 30 件,其中 18 件一等品,现从两箱中随意挑出一箱,然后从该箱中先后随机取两个零件(取出的零件均不放回).试求:

(1) 先取出的零件是一等品的概率 p;

(2) 在先取出的零件是一等品的条件下,第二次取出的零件仍然是一等品的条件概率 q.

(试卷 V)

一、判断题(本题共 5 小题,每小题 2 分,满分 10 分)

(1)【同试卷 Ⅳ　第一、(1) 题】

(2)【同试卷 Ⅳ　第一、(2) 题】

(3) 若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上严格单增,则对区间 (a,b) 内任何一点 x 有 $f'(x)>0$.

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,k 为常数,且 $|\boldsymbol{A}|$ 和 $|k\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 和 $k\boldsymbol{A}$ 的行列式,则 $|k\boldsymbol{A}|=k|\boldsymbol{A}|$.

(5)【同试卷 Ⅳ　第一、(5) 题】

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 2 分,满分 10 分)

(1)【同试卷 Ⅳ　第二、(1) 题】

(2)【同试卷 Ⅳ　第二、(2) 题】

(3)【同试卷 Ⅳ　第二、(3) 题】

(4)【同试卷 Ⅳ　第二、(4) 题】

(5) 对于任意两个事件 A 和 B,有 $P(A-B)=($　　$)$

(A) $P(A)-P(B)$.　　(B) $P(A)-P(B)+P(AB)$.

(C) $P(A)-P(AB)$.　　(D) $P(A)-P(\bar{B})-P(A\bar{B})$.

三、计算下列各题(本题共5小题,每小题4分,满分20分)

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}$.

(2)【同试卷Ⅳ　第三、(2)题】

(3)【同试卷Ⅳ　第三、(3)题】

(4) 计算定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{e}^{\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x$.

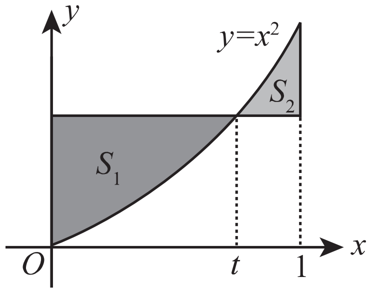
(5) 求不定积分 $\int\dfrac{x\mathrm{d}x}{x^4+2x^2+5}$.

四、(本题满分10分)

考虑函数 $y=x^2,0\leqslant x\leqslant 1$.问:

(1) t 取何值时,右图中阴影部分的面积 S_1 与 S_2 之和 $S=S_1+S_2$ 最小?

(2) t 取何值时,面积 $S=S_1+S_2$ 最大?



五、(本题满分5分)【同试卷Ⅳ　第六题】

六、(本题满分8分)

设某产品的总成本函数为 $C(x)=400+3x+\dfrac{1}{2}x^2$,而需求函数为 $p=\dfrac{100}{\sqrt{x}}$,其中 x 为产量(假定等于需求量), p 为价格,试求:

(1) 边际成本;

(2) 边际收益;

(3) 边际利润;

(4) 收益的价格弹性.

七、(本题满分8分)【同试卷Ⅳ　第八题】

八、(本题满分7分)【同试卷Ⅳ　第九题】

九、(本题满分6分)【同试卷Ⅳ　第十题】

十、(本题满分8分)

已知随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=0.2$, $P\{X=2\}=0.3$, $P\{X=3\}=0.5$,试写出 X 的分布函数 $F(x)$,并求 X 的数学期望与方差.

十一、(本题满分8分)【同试卷Ⅳ　第十二题】

1988 年全国硕士研究生招生考试试题

(试卷 Ⅳ)

一、填空题(本题共 4 小题,每小题 3 分,满分 12 分)

(1) 设 $f(x)=\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}dt,\ -\infty<x<+\infty$,则

① $f'(x)=$______;　　② $f(x)$ 的单调性是______;

③ $f(x)$ 的奇偶性是______;　　④ 其图形的拐点是______;

⑤ 凹凸区间是______;　　⑥ 水平渐近线是______.

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$______.

(3) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$______.

(4) 设 $P(A)=0.4,\ P(A\cup B)=0.7$,那么

① 若 A 与 B 互不相容,则 $P(B)=$______;

② 若 A 与 B 相互独立,则 $P(B)=$______.

二、判断题(本题共 5 小题,每小题 2 分,满分 10 分)

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 均存在,则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 存在.

(2) 若 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点,则必有 $f'(x_0)=0$.

(3) 等式 $\int_0^a f(x)dx=-\int_0^a f(a-x)dx$ 对任何实数 a 都成立.

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶非零方阵,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的秩必小于 n.

(5) 若事件 A,B,C 满足等式 $A\cup C=B\cup C$,则 $A=B$.

三、(本题共 4 小题,每小题 4 分,满分 16 分)

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}$.

(2) 已知 $u+e^u=xy$,求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

(3) 求定积分 $\int_0^3 \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$.

(4) 求二重积分 $\int_0^{\frac{\pi}{6}}dy\int_y^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{\cos x}{x}dx$.

四、(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分)

(1) 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 的敛散性.

(2) 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 都收敛,试证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

五、(本题满分 8 分)

已知某商品的需求量 D 和供给量 S 都是价格 p 的函数:

$$D = D(p) = \frac{a}{p^2},\ S = S(p) = bp,$$

其中 $a > 0$ 和 $b > 0$ 为常数;价格 p 是时间 t 的函数且满足方程

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = k[D(p) - S(p)]\ (k \text{ 为正的常数}).$$

假设当 $t = 0$ 时价格为 1,试求:

(1) 需求量等于供给量时的均衡价格 p_e;

(2) 价格函数 $p(t)$;

(3) 极限 $\lim\limits_{t\to+\infty} p(t)$.

六、(本题满分 8 分)

在曲线 $y = x^2(x \geqslant 0)$ 上某点 A 处作一切线,使之与曲线以及 x 轴所围图形的面积为$\frac{1}{12}$,试求:

(1) 切点 A 的坐标;

(2) 过切点 A 的切线方程;

(3) 由上述所围平面图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

七、(本题满分 8 分)

已知线性方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - k_1x_3 + 15x_4 = 3, \\ x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 12x_4 = k_2. \end{cases}$ 问 k_1 和 k_2 各取何值时,方程组无解?有唯一解?有无穷多解?在方程组有无穷多解的情况下,试求出一般解.

八、(本题满分 7 分)

已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s \geqslant 2)$ 线性无关.设 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\ \boldsymbol{\beta}_{s-1} = \boldsymbol{\alpha}_{s-1} + \boldsymbol{\alpha}_s,\ \boldsymbol{\beta}_s = \boldsymbol{\alpha}_s + \boldsymbol{\alpha}_1$.试讨论向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的线性相关性.

九、(本题满分 6 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵, $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}| = \frac{1}{2}$,求行列式 $|(3\boldsymbol{A})^{-1} - 2\boldsymbol{A}^*|$ 的值.

十、(本题满分 7 分)

玻璃杯成箱出售,每箱20只.假设各箱含0,1,2只残次品的概率相应为0.8,0.1和0.1.一顾客欲购一箱玻璃杯,在购买时,售货员随意取一箱,而顾客随机地察看 4 只:若无残次品,则买下该箱玻璃杯,否则退回. 试求:(1) 顾客买下该箱的概率 α;(2) 在顾客买下的一箱中,确实没有残次品的概率 β.

十一、(本题满分 6 分)

某保险公司多年统计资料表明,在索赔户中被盗索赔户占20%,以 X 表示在随意抽查的 100 个索赔户中因被盗向保险公司索赔的户数.

(1) 写出 X 的概率分布；
(2) 利用棣莫佛一拉普拉斯定理，求出被盗索赔户不少于 14 户且不多于 30 户的概率的近似值.
[附表] $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数.

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$\Phi(x)$	0.5	0.692	0.841	0.933	0.977	0.994	0.999

十二、(本题满分 6 分)
假设随机变量 X 在区间 $(1,2)$ 上服从均匀分布. 试求随机变量 $Y=e^{2X}$ 的概率密度 $f(y)$.

(试卷 Ⅴ)

一、(本题满分 12 分)【同试卷 Ⅳ 第一题】

二、(本题满分 10 分)【同试卷 Ⅳ 第二题】

三、(本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分)

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)\tan\dfrac{\pi}{2}x$.

(2) 已知 $u=e^{\frac{x}{y}}$，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

(3)【同试卷 Ⅳ 第三、(3) 题】 (4)【同试卷 Ⅳ 第三、(4) 题】

四、(本题满分 6 分)
确定常数 a 和 b，使函数 $f(x)=\begin{cases} ax+b, & x>1, \\ x^2, & x\leqslant 1 \end{cases}$ 处处可导.

五、(本题满分 8 分)
将长为 a 的铁丝切成两段，一段围成正方形，另一段围成圆形. 问这两段铁丝各长为多少时，正方形与圆形的面积之和为最小？

六、(本题满分 8 分)【同试卷 Ⅳ 第六题】

七、(本题满分 8 分)【同试卷 Ⅳ 第七题】

八、(本题满分 6 分)
已知 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足矩阵方程 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 给定，$\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵. 证明：$\boldsymbol{A}$ 可逆，并求出其逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

九、(本题满分 7 分)【同试卷 Ⅳ 第八题】

十、(本题满分 7 分)【同试卷 Ⅳ 第十题】

十一、(本题满分 7 分)
假设有十只同种电器元件，其中有两只废品. 装配仪器时，从这批元件中任取一只，如是废品，则扔掉重新任取一只. 试求在取到正品之前，已取出的废品只数的概率分布、数学期望和方差.

十二、(本题满分 5 分)【同试卷 Ⅳ 第十二题】

1989 年全国硕士研究生招生考试试题

(试卷 Ⅳ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 曲线 $y = x + \sin^2 x$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1 + \dfrac{\pi}{2}\right)$ 处的切线方程是______.

(2) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{n+1}}$ 的收敛域是______.

(3) 若齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

只有零解,则 λ 应满足的条件是______.

(4) 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ A\sin x, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

则 $A =$ ______, $P\left\{ |X| < \dfrac{\pi}{6} \right\} =$ ______.

(5) 设随机变量 X 的数学期望 $E(X) = \mu$,方差 $D(X) = \sigma^2$,则由切比雪夫(Chebyshev)不等式,有 $P\{ |X - \mu| \geqslant 3\sigma \} \leqslant$ ______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $f(x) = 2^x + 3^x - 2$,则当 $x \to 0$ 时(　　)

(A) $f(x)$ 是 x 的等价无穷小量.　　(B) $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小量.

(C) $f(x)$ 是比 x 较高阶的无穷小量.　　(D) $f(x)$ 是比 x 较低阶的无穷小量.

(2) 在下列等式中,正确的结果是(　　)

(A) $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x)$.　(B) $\int \mathrm{d}f(x) = f(x)$.　(C) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)$.　(D) $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)$.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵且 $|\boldsymbol{A}| = 0$,则(　　)

(A) $\boldsymbol{A}$ 中必有两行(列)的元素对应成比例.

(B) $\boldsymbol{A}$ 中任意一行(列)向量是其余各行(列)向量的线性组合.

(C) $\boldsymbol{A}$ 中必有一行(列)向量是其余各行(列)向量的线性组合.

(D) $\boldsymbol{A}$ 中至少有一行(列)的元素全为 0.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 $n \times n$ 矩阵,则必有(　　)

(A) $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}|$.　　(B) $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

(C) $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{BA}|$.　　(D) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}^{-1}$.

(5) 以 A 表示事件"甲种产品畅销,乙种产品滞销",则其对立事件 $\bar{A}$ 为(　　)

(A)"甲种产品滞销,乙种产品畅销".　　(B)"甲、乙两种产品均畅销".

(C)“甲种产品滞销”.　　(D)“甲种产品滞销或乙种产品畅销”.

三、计算题(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1) 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

(2) 已知 $z=f(u,v)$, $u=x+y$, $v=xy$,且 $f(u,v)$ 的二阶偏导数都连续. 求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(3) 求微分方程 $y''+5y'+6y=2\mathrm{e}^{-x}$ 的通解.

四、(本题满分 9 分)

设某厂家打算生产一批商品投放市场. 已知该商品的需求函数为 $p=p(x)=10\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$,且最大需求量为 6,其中 x 表示需求量, p 表示价格.

(1) 求该商品的收益函数和边际收益函数;(2 分)

(2) 求使收益最大时的产量,最大收益和相应的价格;(4 分)

(3) 画出收益函数的图形.(3 分)

五、(本题满分 9 分)

已知函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$$

计算下列各题:

(1) $S_0=\int_0^2 f(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$;(4 分)

(2) $S_1=\int_2^4 f(x-2)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$;(2 分)

(3) $S_n=\int_{2n}^{2n+2} f(x-2n)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\ (n=2,3,\cdots)$;(1 分)

(4) $S=\sum\limits_{n=0}^{\infty}S_n$. (2 分)

六、(本题满分 6 分)

假设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且 $f'(x)\leqslant 0$. 记

$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

证明在(a,b)内,$F'(x)\leqslant 0$.

七、(本题满分 5 分)

已知 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{pmatrix},$$

求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

八、(本题满分 6 分)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,t)$.问:

(1) 当 t 为何值时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关? (3 分)

(2) 当 t 为何值时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关? (1 分)

(3) 当向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关时,将 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 的线性组合. (2 分)

九、(本题满分 5 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&-2\\2&-2&-1\end{pmatrix}$.

(1) 试求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;(2 分)

(2) 利用(1) 的结果,求矩阵 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值,其中 $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵. (3 分)

十、(本题满分 7 分)

已知随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, & 0<x<+\infty,\ 0<y<+\infty,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

试求:(1) $P\{X<Y\}$;(5 分)

(2) $E(XY)$.(2 分)

十一、(本题满分 8 分)

设随机变量 X 在 $[2,5]$ 上服从均匀分布,现在对 X 进行三次独立观测,试求至少有两次观测值大于 3 的概率.

(试卷 V)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)【同试卷 Ⅳ 第一、(1) 题】

(2) 某商品的需求量 Q 与价格 P 的函数关系为 $Q=aP^b$,其中 a 和 b 为常数,且 $a\neq0$,则需求量对价格 P 的弹性是______.

(3) 行列式 $\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&x+1&-1\\1&x-1&1&-1\\x+1&-1&1&-1\end{vmatrix}=$______.

(4) 设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立,其中 X_1 在 $[0,6]$ 上服从均匀分布,X_2 服从正态分布 $N(0,2^2)$,X_3 服从参数为 $\lambda=3$ 的泊松分布.记 $Y=X_1-2X_2+3X_3$,则 $D(Y)=$______.

(5)【同试卷 Ⅳ 第一、(4) 题】

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)【同试卷 Ⅳ 第二、(1) 题】 (2)【同试卷 Ⅳ 第二、(2) 题】

(3)【同试卷 Ⅳ 第二、(3) 题】

(4) 设 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r,则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充分必要条件是 ( )

(A) $r=n$. (B) $r<n$. (C) $r\geqslant n$. (D) $r>n$.

(5)【同试卷 Ⅳ　第二、(5) 题】

三、(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

(1) 求极限 $\lim\limits_{x \to +\infty}(x + e^x)^{\frac{1}{x}}$.

(2) 已知 $z = a^{\sqrt{x^2 - y^2}}$,其中 $a > 0, a \neq 1$,求 dz.

(3) 求不定积分 $\int \frac{x + \ln(1 - x)}{x^2} dx$.

(4) 求二重积分 $\iint\limits_D \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2} dxdy$,其中 D 是 $x^2 + y^2 = 1$, $x = 0$ 和 $y = 0$ 所围成的区域在第 Ⅰ 象限的部分.

四、(本题满分 6 分)

已知某企业的总收入函数为 $R = 26x - 2x^2 - 4x^3$,总成本函数为 $C = 8x + x^2$,其中 x 表示产品的产量,求利润函数,边际收入函数,边际成本函数,以及企业获得最大利润时的产量和最大利润.

五、(本题满分 12 分)

已知函数 $y = \frac{2x^2}{(1 - x)^2}$,试求其单调区间,极值点及图形的凹凸性、拐点和渐近线,并画出函数的图形.

六、(本题满分 5 分)【同试卷 Ⅳ　第七题】

七、(本题满分 6 分)

讨论向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,3,-1)$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (5,3,t)$ 的线性相关性.

八、(本题满分 5 分)【同试卷 Ⅳ　第九题】

九、(本题满分 8 分)

已知随机变量 X 和 Y 的联合概率分布为

(x,y)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,0)$	$(2,1)$
$P\{X = x, Y = y\}$	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.15

试求:(1) X 的概率分布;

(2) $X + Y$ 的概率分布;

(3) $Z = \sin \frac{\pi(X + Y)}{2}$ 的数学期望.

十、(本题满分 8 分)

某仪器装有三只独立工作的同型号电子元件,其寿命(单位:小时)都服从同一指数分布,概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{600} e^{-\frac{x}{600}}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

试求:在仪器使用的最初 200 小时内,至少有一只电子元件损坏的概率 α.

1990 年全国硕士研究生招生考试试题

(试卷 Ⅳ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$______.

(2) 设函数$f(x)$有连续的导函数,$f(0)=0$且$f'(0)=b$,若函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ A, & x=0\end{cases}$$

在$x=0$处连续,则常数$A=$______.

(3) 曲线$y=x^2$与直线$y=x+2$所围成的平面图形的面积为______.

(4) 若线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2=-a_1,\\ x_2+x_3=a_2,\\ x_3+x_4=-a_3,\\ x_4+x_1=a_4\end{cases}$$

有解,则常数a_1,a_2,a_3,a_4应满足条件______.

(5) 一射手对同一目标独立地进行 4 次射击,若至少命中一次的概率为$\dfrac{80}{81}$,则该射手的命中率为______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设函数$f(x)=x\tan xe^{\sin x}$,则$f(x)$是(　　)

(A) 偶函数.　　(B) 无界函数.　　(C) 周期函数.　　(D) 单调函数.

(2) 设函数$f(x)$对任意的x均满足等式$f(1+x)=af(x)$,且有$f'(0)=b$,其中a,b为非零常数,则(　　)

(A) $f(x)$在$x=1$处不可导.　　(B) $f(x)$在$x=1$处可导,且$f'(1)=a$.

(C) $f(x)$在$x=1$处可导,且$f'(1)=b$.　　(D) $f(x)$在$x=1$处可导,且$f'(1)=ab$.

(3) 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关的充分条件是(　　)

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$均不为零向量.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中任意两个向量的分量不成比例.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中任意一个向量均不能由其余$s-1$个向量线性表示.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中有一部分向量线性无关.

(4) 设A,B为两随机事件,且$B\subset A$,则下列式子正确的是(　　)

(A) $P(A+B)=P(A)$.　　(B) $P(AB)=P(A)$.

(C) $P(B\mid A)=P(B)$.　　(D) $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

(5) 设随机变量X和Y相互独立,其概率分布为

m	-1	1
$P\{X=m\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

m	-1	1
$P\{Y=m\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则下列式子正确的是(　　)

(A) $X=Y$.　　(B) $P\{X=Y\}=0$.　　(C) $P\{X=Y\}=\frac{1}{2}$.　　(D) $P\{X=Y\}=1$.

三、计算题(本题共 4 小题,每小题 5 分,满分 20 分)

(1) 求函数 $I(x)=\int_{e}^{x}\frac{\ln t}{t^2-2t+1}dt$ 在区间 $[e,e^2]$ 上的最大值.

(2) 计算二重积分 $\iint\limits_D xe^{-y^2}dxdy$,其中 D 是曲线 $y=4x^2$ 和 $y=9x^2$ 在第一象限所围成的区域.

(3) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^2}$ 的收敛域.

(4) 求微分方程 $y'+y\cos x=(\ln x)e^{-\sin x}$ 的通解.

四、(本题满分 9 分)

某公司可通过电台及报纸两种方式做销售某种商品的广告,根据统计资料,销售收入 R(万元)与电台广告费用 x_1(万元)及报纸广告费用 x_2(万元)之间的关系有如下经验公式:

$$R=15+14x_1+32x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10x_2^2.$$

(1) 在广告费用不限的情况下,求最优广告策略;

(2) 若提供的广告费用为 1.5 万元,求相应的最优广告策略.

五、(本题满分 6 分)

设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,c]$ 上连续,其导数 $f'(x)$ 在开区间 $(0,c)$ 内存在且单调减少,$f(0)=0$. 试应用拉格朗日中值定理证明不等式 $f(a+b)\leqslant f(a)+f(b)$,其中常数 a,b 满足条件 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant a+b\leqslant c$.

六、(本题满分 8 分)

已知线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a,\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0,\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b,\\5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2.\end{cases}$$

(1) a,b 为何值时,方程组有解?

(2) 方程组有解时,求出方程组的导出组的一个基础解系;

(3) 方程组有解时,求出方程组的全部解.

七、(本题满分 5 分)

已知对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$,存在自然数 k,使得 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$.试证明矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,并写出其逆矩阵的表达式($\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位阵).

八、(本题满分 6 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,λ_1 和 λ_2 是 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值, $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 是分别属于 λ_1 和 λ_2 的特征向量. 试证明 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

九、(本题满分 4 分)

从 $0,1,2,\cdots,9$ 等十个数字中任意选出三个不同的数字,试求下列事件的概率:

$A_1=\{$三个数字中不含 0 和 5$\}$;

$A_2=\{$三个数字中不含 0 或 5$\}$;

$A_3=\{$三个数字中含 0 但不含 5$\}$.

十、(本题满分 5 分)

一电子仪器由两个部件构成,以 X 和 Y 分别表示两个部件的寿命(单位:千小时),已知 X 和 Y 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-0.5x}-e^{-0.5y}+e^{-0.5(x+y)}, & x\geqslant 0,y\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 问 X 和 Y 是否独立?

(2) 求两个部件的寿命都超过 100 小时的概率 α.

十一、(本题满分 7 分)

某地抽样调查结果表明,考生的外语成绩(百分制) 近似服从正态分布,平均成绩为 72 分,96 分以上的占考生总数的 2.3%,试求考生的外语成绩在 60 分至 84 分之间的概率.

[附表](表中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数)

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$\Phi(x)$	0.500	0.692	0.841	0.933	0.977	0.994	0.999

(试卷 Ⅴ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)【同试卷 Ⅳ　第一、(1) 题】　(2)【同试卷 Ⅳ　第一、(2) 题】

(3)【同试卷 Ⅳ　第一、(3) 题】　(4)【同试卷 Ⅳ　第一、(4) 题】

(5) 已知随机变量 $X\sim N(-3,1)$,$Y\sim N(2,1)$,且 X,Y 相互独立,设随机变量 $Z=X-2Y+7$,则 $Z\sim$ ______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)【同试卷 Ⅳ　第二、(1) 题】

(2)【同试卷 Ⅳ　第二、(2) 题】

(3)【同试卷 Ⅳ　第二、(3) 题】

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵, $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则(　　)

(A) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.　(B) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|$.　(C) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^n$.　(D) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}^{-1}|$.

(5) 已知随机变量 X 服从二项分布，且 $E(X)=2.4$，$D(X)=1.44$，则二项分布的参数 n，p 的值为 (　　)

(A) $n=4, p=0.6$.　(B) $n=6, p=0.4$.　(C) $n=8, p=0.3$.　(D) $n=24, p=0.1$.

三、(本题共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分)

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x(1+t^2)e^{t^2-x^2}\,dt$.

(2) 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{x\cos^4\frac{x}{2}}{\sin^3 x}dx$.

(3) 设 $x^2+z^2=y\varphi\left(\dfrac{z}{y}\right)$，其中 φ 为可微函数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(4)【同试卷 Ⅳ　第三、(2) 题】

四、(本题满分 9 分)【同试卷 Ⅳ　第四题】

五、(本题满分 6 分)

证明不等式 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geqslant\sqrt{1+x^2}$，$-\infty<x<+\infty$.

六、(本题满分 4 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 10×10 矩阵，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\10^{10}&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$，计算行列式 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 10 阶单位矩阵，λ 为常数.

七、(本题满分 5 分)

设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足条件 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为单位阵. 试证明 $\boldsymbol{A}$ 的实特征向量所对应的特征值的绝对值等于 1.

八、(本题满分 8 分)【同试卷 Ⅳ　第六题】

九、(本题满分 5 分)【同试卷 Ⅳ　第九题】

十、(本题满分 6 分)

甲乙两人独立地各进行两次射击，假设甲的命中率为 0.2，乙的为 0.5，以 X 和 Y 分别表示甲和乙的命中次数，试求 X 和 Y 的联合概率分布.

十一、(本题满分 7 分)【同试卷 Ⅳ　第十一题】

1991 年全国硕士研究生招生考试试题

(试卷 Ⅳ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $z=\mathrm{e}^{\sin(xy)}$,则 $\mathrm{d}z=$______.

(2) 设曲线 $f(x)=x^3+ax$ 与 $g(x)=bx^2+c$ 都通过点 $(-1,0)$,且在点 $(-1,0)$ 有公共切线,则 $a=$______, $b=$______, $c=$______.

(3) 设 $f(x)=x\mathrm{e}^x$,则 $f^{(n)}(x)$ 在点 $x=$______处取极小值______.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵, $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 为分块矩阵,则 $\boldsymbol{X}^{-1}=$______.

(5) 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.4, & -1\leqslant x<1,\\ 0.8, & 1\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3.\end{cases}$$

则 X 的概率分布为______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 下列各式中正确的是(　　)

(A) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=1$.　　(B) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=-\mathrm{e}$.　　(D) $\underset{x\to\infty}{}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=\mathrm{e}$.

(2) 设 $0\leqslant a_n<\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$,则下列级数中肯定收敛的是(　　)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.　　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$.　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵,λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值之一是(　　)

(A) $\lambda^{-1}|\boldsymbol{A}|^n$.　　(B) $\lambda^{-1}|\boldsymbol{A}|$.　　(C) $\lambda|\boldsymbol{A}|$.　　(D) $\lambda|\boldsymbol{A}|^n$.

(4) 设 A 和 B 是任意两个概率不为零的互不相容事件,则下列结论中肯定正确的是(　　)

(A) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 不相容.　　(B) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容.

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$.　　(D) $P(A-B)=P(A)$.

(5) 对于任意两个随机变量 X 和 Y,若 $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$,则(　　)

(A) $D(XY)=D(X)\cdot D(Y)$.　　(B) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$.

(C) X 与 Y 独立.　　(D) X 与 Y 不独立.

三、(本题满分 5 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$,其中 n 是给定的自然数.

四、(本题满分 5 分)

计算二重积分 $I=\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 x 轴，y 轴与曲线 $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=1$ 所围成的区域，$a>0,b>0$.

五、(本题满分 5 分)

求微分方程 $xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2$ 满足条件 $y\Big|_{x=\mathrm{e}}=2\mathrm{e}$ 的特解.

六、(本题满分 5 分)

假设曲线 $L_1: y=1-x^2(0\leqslant x\leqslant 1)$，$x$ 轴和 y 轴所围区域被曲线$L_2: y=ax^2$ 分为面积相等的两部分，其中 a 是大于零的常数，试确定 a 的值.

七、(本题满分 8 分)

某厂家生产的一种产品同时在两个市场销售，售价分别为 p_1 和 p_2，销售量分别为 q_1 和 q_2，需求函数分别为 $q_1=24-0.2p_1$ 和 $q_2=10-0.05p_2$，总成本函数为 $C=35+40(q_1+q_2)$. 试问：厂家如何确定两个市场的售价，能使其获得的总利润最大？最大总利润为多少？

八、(本题满分 6 分)

试证明函数 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

九、(本题满分 7 分)

设有 3 维列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1+\lambda\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1+\lambda\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1+\lambda\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix},$$

问 λ 取何值时，

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表达式唯一？

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表达式不唯一？

(3) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？

十、(本题满分 6 分)

考虑二次型

$$f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3,$$

问 λ 取何值时，f 为正定二次型？

十一、(本题满分 6 分)

试证明 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是

$$D=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\end{vmatrix}\neq 0,$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}$ 表示列向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的转置,$i=1,2,\cdots,n$.

十二、(本题满分 6 分)

一汽车沿一街道行驶,需要通过三个均设有红绿信号灯的路口,每个信号灯为红或绿与其他信号灯为红或绿相互独立,且红绿两种信号显示的时间相等.以 X 表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数. 求 X 的概率分布.

十三、(本题满分 6 分)

假设随机变量 X 和 Y 在圆域 $x^2+y^2\leqslant r^2$ 上服从联合均匀分布.

(1) 求 X 和 Y 的相关系数 ρ;

(2) 问 X 和 Y 是否独立?

十四、(本题满分 5 分)

设总体 X 的概率密度为

$$p(x,\lambda)=\begin{cases}\lambda a x^{a-1}\mathrm{e}^{-\lambda x^a}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$ 是未知参数,$a>0$ 是已知常数. 试根据来自总体 X 的简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$,求 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}$.

(试卷 Ⅴ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)【同试卷 Ⅳ　第一、(1) 题】

(2)【同试卷 Ⅳ　第一、(2) 题】

(3)【同试卷 Ⅳ　第一、(3) 题】

(4) n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b\\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a\end{vmatrix}=$ ______.

(5) 设 A,B 为随机事件,$P(A)=0.7,P(A-B)=0.3$,则 $P(\overline{AB})=$ ______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)【同试卷 Ⅳ　第二、(1) 题】

(2) 设数列的通项为:$x_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}, & n \text{ 为奇数},\\ \dfrac{1}{n}, & n \text{ 为偶数},\end{cases}$ 则当 $n\to\infty$ 时, x_n 是(　　)

(A) 无穷大量.　(B) 无穷小量.　(C) 有界变量.　(D) 无界变量.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则必有(　　)

(A) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.　　(B) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

(C) $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}|=0$.　　(D) $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 所对应的齐次线性方程组,则下列结论正确的是(　　)

(A) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解.

(B) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解.

(C) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解.

(D) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

(5)【同试卷 Ⅳ　第二、(4) 题】

三、(本题满分 5 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

四、(本题满分 5 分)

求定积分 $I=\int_{-1}^{1}(2x+|x|+1)^2\mathrm{d}x$.

五、(本题满分 5 分)

求不定积分 $I=\int\dfrac{x^2}{1+x^2}\arctan x\mathrm{d}x$.

六、(本题满分 5 分)

已知 $xy=xf(z)+yg(z)$, $xf'(z)+yg'(z)\neq 0$,其中 $z=z(x,y)$ 是 x 和 y 的函数,求证

$$[x-g(z)]\frac{\partial z}{\partial x}=[y-f(z)]\frac{\partial z}{\partial y}.$$

七、(本题满分 6 分)【同试卷 Ⅳ　第六题】

八、(本题满分 8 分)【同试卷 Ⅳ　第七题】

九、(本题满分 6 分)

证明不等式 $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)>\dfrac{1}{1+x}(0<x<+\infty)$.

十、(本题满分 5 分)

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足条件 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$.

(1) 证明 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 为可逆矩阵;

(2) 已知 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-3&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

十一、(本题满分 7 分)【同试卷 Ⅳ 第九题】

十二、(本题满分 5 分)

已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,k,1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征向量,试求常数 k 的值.

十三、(本题满分 7 分)

一汽车沿一街道行驶,需要通过三个均设有红绿信号灯的路口,每个信号灯为红或绿与其他信号灯为红或绿相互独立,且红绿两种信号显示的时间相等.以 X 表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数.

(1) 求 X 的概率分布;

(2) 求 $E\left(\dfrac{1}{1+X}\right)$.

十四、(本题满分 6 分)

在电源电压不超过200伏,200 ~ 240伏和超过240伏三种情况下,某种电子元件损坏的概率分别为 0.1,0.001 和 0.2.假设电源电压 X 服从正态分布 $N(220,25^2)$.试求:

(1) 该电子元件损坏的概率 α;

(2) 该电子元件损坏时,电源电压在 220 ~ 240 伏的概率 β.

附表:(表中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数)

x	0.10	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40
$\Phi(x)$	0.530	0.579	0.655	0.726	0.788	0.841	0.885	0.919

1992 年全国硕士研究生招生考试试题

(试卷 Ⅳ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设商品的需求函数为 $Q=100-5p$,其中 Q, p 分别表示需求量和价格,如果商品需求弹性的绝对值大于 1,则商品价格的取值范围是______.

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^{2n}}{n4^n}$ 的收敛域为______.

(3) 交换积分次序 $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x=$______.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶方阵,$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵,且 $|\boldsymbol{A}|=a$, $|\boldsymbol{B}|=b$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,则 $|\boldsymbol{C}|=$______.

(5) 将 C,C,E,E,I,N,S 等七个字母随机地排成一行,那么,恰好排成 SCIENCE 的概率为______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $F(x)=\dfrac{x^2}{x-a}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$,其中 $f(x)$ 为连续函数,则 $\lim\limits_{x\to a}F(x)$ 等于(　　)

(A) a^2.　(B) $a^2f(a)$.　(C) 0.　(D) 不存在.

(2) 当 $x\to 0$ 时,下列四个无穷小量中,哪一个是比其他三个更高阶的无穷小量?(　　)

(A) x^2.　(B) $1-\cos x$.　(C) $\sqrt{1-x^2}-1$.　(D) $x-\tan x$.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解的充分条件是(　　)

(A) $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性无关.　(B) $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关.

(C) $\boldsymbol{A}$ 的行向量线性无关.　(D) $\boldsymbol{A}$ 的行向量线性相关.

(4) 设当事件 A 与 B 同时发生时,事件 C 必发生,则(　　)

(A) $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$.　(B) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$.

(C) $P(C)=P(AB)$.　(D) $P(C)=P(A\cup B)$.

(5) (超纲题) 设 n 个随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布, $D(X_1)=\sigma^2$, $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$, $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$,则(　　)

(A) S 是 σ 的无偏估计量.(可改为"$E(S)=\sigma$.")

(B) S 是 σ 的最大似然估计量.

(C) S 是 σ 的相合估计量(即一致估计量).

(D) S 与 $\overline{X}$ 相互独立.

三、(本题满分 5 分)

设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln[\cos(x-1)]}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}, & x\neq 1,\\ 1, & x=1,\end{cases}$ 问函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否连续?若不连续,修改函数

在 $x=1$ 处的定义使之连续.

四、(本题满分 5 分)

计算 $I=\int \frac{\operatorname{arccot} e^x}{e^x}dx$.

五、(本题满分 5 分)

设 $z=\sin(xy)+\varphi\left(x,\frac{x}{y}\right)$,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$,其中 $\varphi(u,v)$ 有二阶偏导数.

六、(本题满分 5 分)

求连续函数 $f(x)$,使它满足 $f(x)+2\int_0^x f(t)dt=x^2$.

七、(本题满分 6 分)

求证:当 $x\geqslant 1$ 时, $\arctan x-\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$.

八、(本题满分 9 分)

设曲线方程为 $y=e^{-x}(x\geqslant 0)$.

(1) 把曲线 $y=e^{-x}$, x 轴, y 轴和直线 $x=\xi(\xi>0)$ 所围平面图形绕 x 轴旋转一周,得一旋转体,求此旋转体体积 $V(\xi)$;求满足 $V(a)=\frac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi)$ 的 a.

(2) 在此曲线上找一点,使过该点的切线与两个坐标轴所夹平面图形的面积最大,并求出该面积.

九、(本题满分 7 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}.$$

(1) 求 x 和 y 的值;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

十、(本题满分 6 分)

已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$,且 $\boldsymbol{B}$ 的每一个列向量都是以下方程组的解:

$$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0,\\2x_1-x_2+\lambda x_3=0,\\3x_1+x_2-x_3=0.\end{cases}$$

(1) 求 λ 的值;

(2) 证明 $|\boldsymbol{B}|=0$.

十一、(本题满分 6 分)

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 m 阶,n 阶正定矩阵,试判定分块矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 是否是正定矩阵.

十二、(本题满分 7 分)

假设测量的随机误差 $X\sim N(0,10^2)$,试求在 100 次独立重复测量中,至少有三次测量误差的绝对值大于 19.6 的概率 α,并利用泊松分布求出 α 的近似值(要求小数点后取两位有效数字).

[附表]

λ	1	2	3	4	5	6	7	…
$e^{-\lambda}$	0.368	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	…

十三、(本题满分 5 分)

一台设备由三大部件构成,在设备运转中各部件需要调整的概率相应为 0.10,0.20 和 0.30. 假设各部件的状态相互独立,以 X 表示同时需要调整的部件数,试求 X 的概率分布,数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$.

十四、(本题满分 4 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1 求 X 的概率密度 $f_X(x)$;

(2) 求概率 $P\{X+Y\leqslant 1\}$.

(试卷 V)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty} t\left(\dfrac{x+t}{x-t}\right)^x$,则 $f'(t)=$______.

(2)【同试卷 Ⅳ 第一、(1) 题】

(3) 设 $f(x)=\sin x$, $f[\varphi(x)]=1-x^2$,则 $\varphi(x)=$______;其定义域为______.

(4) 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$ 的非零特征值是______.

(5) 设对于事件 A,B,C,有 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$,$P(AB)=P(BC)=0$,$P(AC)=\dfrac{1}{8}$,则 A,B,C 三个事件中至少出现一个的概率为______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)【同试卷 Ⅳ　第二、(1) 题】

(2) 当 $x\to 0$ 时,下列四个无穷小量中,比其它三个更高阶的无穷小量是(　　)

(A) x^2.　　(B) $1-\cos x$.　　(C) $\sqrt{1-x^2}-1$.　　(D) $x-\sin x$.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵,则 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}$ 等于(　　)

(A) $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$.　　(B) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.　　(C) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$.　　(D) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$.

(4) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 均为 n 维向量,那么下列结论正确的是(　　)

(A) 若 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

(B) 若对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\neq\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

(C) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关,则对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$.

(D) 若 $0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

(5)【同试卷 Ⅳ　第二、(4) 题】

三、(本题满分 5 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln[\cos(x-1)]}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}$.

四、(本题满分 5 分)【同试卷 Ⅳ　第四题】

五、(本题满分 6 分)

求连续函数 $f(x)$,使它满足 $\int_0^1 f(tx)\,\mathrm{d}t=f(x)+x\sin x$.

六、(本题满分 5 分)【同试卷 Ⅳ　第五题】

七、(本题满分 6 分)

设生产某产品的固定成本为 10,而当产量为 x 时的边际成本函数为 $MC=-40-20x+3x^2$,边际收入函数为 $MR=32+10x$.试求:

(1) 总利润函数;

(2) 使总利润最大的产量.

八、(本题满分 6 分)

求证:方程 $x+p+q\cos x=0$ 恰有一个实根,其中 p,q 为常数,且 $0<q<1$.

九、(本题满分 7 分)

给定曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}$.

(1) 求曲线在横坐标为 x_0 的点处的切线方程;

（2）求曲线的切线被两坐标轴所截线段的最短长度.

十、（本题满分 5 分）

设矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{X}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位阵,又已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,试求出矩阵 $\boldsymbol{X}$.

十一、（本题满分 5 分）

设线性方程组$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0,\\2x_1-x_2+\lambda x_3=0,\\3x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$.试求 λ 的值.

十二、（本题满分 6 分）

已知实矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足条件：①$a_{ij}=A_{ij}(i,j=1,2,3)$,其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式；②$a_{11}\neq0$. 计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$.

十三、（本题满分 7 分）【同试卷 Ⅳ　第十二题】

十四、（本题满分 7 分）【同试卷 Ⅳ　第十三题】

1993 年全国硕士研究生招生考试试题

(试卷 Ⅳ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}=$______.

(2) 已知 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$, $f'(x)=\operatorname{arct}\quad x^2$,则$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$______.

(3) 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(\ln 3)^n}{2^n}$ 的和为______.

(4) 设 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2,则其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩为______.

(5) (超纲题) 设总体 X 的方差为 1,根据来自 X 的容量为 100 的简单随机样本,测得样本均值为 5,则 X 的数学期望的置信度近似等于 0.95 的置信区间为______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　)

(A) 极限不存在.　　(B) 极限存在但不连续.

(C) 连续但不可导.　　(D) 可导.

(2) 设 $f(x)$ 为连续函数,且 $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\ln x}f(t)\mathrm{d}t$,则 $F'(x)$ 等于(　　)

(A) $\dfrac{1}{x}f(\ln x)+\dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.　　(B) $f(\ln x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(C) $\dfrac{1}{x}f(\ln x)-\dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.　　(D) $f(\ln x)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(3) n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 具有 n 个不同的特征值是 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似的(　　)

(A) 充分必要条件.　　(B) 充分而非必要条件.

(C) 必要而非充分条件.　　(D) 既非充分也非必要条件.

(4) (原考题有误,见参考答案说明) 设两事件 A 与 B 满足 $P(B|A)=1$,则(　　)

(A) A 是必然事件.　　(B) $P(B|\overline{A})=0$.　　(C) $A\supset B$.　　(D) $A\subset B$.

(5) 设随机变量 X 的概率密度为 $\varphi(x)$,且 $\varphi(-x)=\varphi(x)$, $F(x)$ 为 X 的分布函数,则对任意实数 a,有(　　)

(A) $F(-a)=1-\int_0^a\varphi(x)\mathrm{d}x$.　　(B) $F(-a)=\dfrac{1}{2}-\int_0^a\varphi(x)\mathrm{d}x$.

(C) $F(-a)=F(a)$.　　(D) $F(-a)=2F(a)-1$.

三、(本题满分 5 分)

设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$ 所确定的二元函数,求 $\mathrm{d}z$.

四、(本题满分 7 分)

已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^{x}=\displaystyle\int_a^{+\infty}4x^2e^{-2x}\mathrm{d}x$,求常数 a 的值.

五、(本题满分 9 分)

设某产品的成本函数为 $C=aq^2+bq+c$,需求函数为 $q=\dfrac{1}{e}(d-p)$,其中 C 为成本, q 为需求量(即产量), p 为单价, a,b,c,d,e 都是正的常数,且 $d>b$. 求:

(1) 利润最大时的产量及最大利润;

(2) 需求对价格的弹性;

(3) 需求对价格弹性的绝对值为 1 时的产量.

六、(本题满分 8 分)

假设:

(1) 函数 $y=f(x)(0\leqslant x<+\infty)$ 满足条件 $f(0)=0$ 和 $0\leqslant f(x)\leqslant e^x-1$;

(2) 平行于 y 轴的动直线 MN 与曲线 $y=f(x)$ 和 $y=e^x-1$ 分别相交于点 P_1 和 P_2;

(3) 曲线 $y=f(x)$,直线 MN 与 x 轴所围封闭图形的面积 S 恒等于线段 P_1P_2 的长度.

求函数 $y=f(x)$ 的表达式.

七、(本题满分 6 分)

假设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内二阶可导,过点 $A(0,f(0))$ 与 $B(1,f(1))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $C(c,f(c))$,其中 $0<c<1$.

证明:在$(0,1)$内至少存在一点 ξ,使 $f''(\xi)=0$.

八、(本题满分 10 分)

k 为何值时,线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+kx_3=4,\\-x_1+kx_2+x_3=k^2,\\x_1-x_2+2x_3=-4\end{cases}$ 有唯一解、无解、有无穷多解? 在有解情况下,求出其全部解.

九、(本题满分 9 分)

设二次型 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\alpha x_1x_2+2\beta x_2x_3+2x_1x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化成 $f=y_2^2+2y_3^2$,其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$ 是 3 维列向量, $\boldsymbol{P}$ 是 3 阶正交矩阵. 试求常数 α,β.

十、(本题满分 8 分)

设随机变量 X 和 Y 同分布,X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{8}x^2, & 0<x<2,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 已知事件 $A=\{X>a\}$ 和 $B=\{Y>a\}$ 独立,且 $P(A\cup B)=\dfrac{3}{4}$. 求常数 a;

(2) 求 $\dfrac{1}{X^2}$ 的数学期望.

十一、(本题满分 8 分)

假设一大型设备在任何长为 t 的时间内发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布,

(1) 求相继两次故障之间时间间隔 T 的概率分布;

(2) 求在设备已经无故障工作 8 小时的情形下,再无故障运行 8 小时的概率 Q.

(试卷 Ⅴ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]=$______.

(2) 已知 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$, $f'(x)=\text{arcs}\quad x^2$,则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$______.

(3) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}=$______.

(4)【同试卷 Ⅳ　第一、(4) 题】

(5) 设 10 件产品有 4 件不合格品,从中任取两件,已知所取两件产品中有一件是不合格品,则另一件也是不合格品的概率为______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)【同试卷 Ⅳ　第二、(1) 题】

(2)【同试卷 Ⅳ　第二、(2) 题】

(3) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都是4维列向量,且4阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|=m$, $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=n$,则 4 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|$ 等于(　　)

(A) $m+n$.　　(B) $-(m+n)$.　　(C) $n-m$.　　(D) $m-n$.

(4) 设 $\lambda=2$ 是非奇异矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,则矩阵 $\left(\dfrac{1}{3}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}$ 有一特征值等于(　　)

(A) $\dfrac{4}{3}$.　　(B) $\dfrac{3}{4}$.　　(C) $\dfrac{1}{2}$.　　(D) $\dfrac{1}{4}$.

(5) 设随机变量 X 与 Y 均服从正态分布,$X\sim N(\mu,4^2)$,$Y\sim N(\mu,5^2)$,记 $p_1=P\{X\leqslant\mu-4\}$, $p_2=P\{Y\geqslant\mu+5\}$,则(　　)

(A) 对任何实数 μ,都有 $p_1=p_2$.

(B) 对任何实数 μ,都有 $p_1<p_2$.

(C) 只对 μ 的个别值,才有 $p_1=p_2$.

(D) 对任何实数 μ,都有 $p_1>p_2$.

三、(本题满分 5 分)【同试卷 Ⅳ　第三题】

四、(本题满分 7 分)【同试卷 Ⅳ　第四题】

五、(本题满分 7 分)

已知某厂生产 x 件产品的成本为 $C = 25\,000 + 200x + \frac{1}{40}x^2$(元),问:

(1) 要使平均成本最小,应生产多少件产品?
(2) 若产品以每件 500 元售出,要使利润最大,应生产多少件产品?

六、(本题满分 6 分)

设 p,q 是大于 1 的常数,并且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.证明:对于任意的 $x > 0$,有 $\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q} \geqslant x$.

七、(本题满分 13 分)

运用导数的知识作函数 $y = (x + 6)e^{\frac{1}{x}}$ 的图形.

八、(本题满分 8 分)

已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

试求其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的逆矩阵.

九、(本题满分 8 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n \times m$ 矩阵,$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵$(m > n)$,已知 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}$.试判断 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组是否线性相关?为什么?

十、(本题满分 8 分)

设随机变量 X 和 Y 独立,都在区间$[1,3]$上服从均匀分布.引进事件 $A = \{X \leqslant a\}$,$B = \{Y > a\}$.

(1) 已知 $P(A \cup B) = \frac{7}{9}$,求常数 a;

(2) 求 $\frac{1}{X}$ 的数学期望.

十一、(本题满分 8 分)【同试卷 Ⅳ　第十一题】

1994 年全国硕士研究生招生考试试题

(试卷Ⅳ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\int_{-2}^{2} \frac{x+|x|}{2+x^2}\mathrm{d}x =$ ______.

(2) 已知 $f'(x_0)=-1$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=$ ______.

(3) 设方程 $\mathrm{e}^{xy}+y^2=\cos x$ 确定 y 为 x 的函数,则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ______.

(4) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$,其中 $a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$,则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ ______.

(5) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} 2x, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中事件 $\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$ 出现的次数,则 $P\{Y=2\}=$ ______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 曲线 $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{x^2+x-1}{(x+1)(x-2)}$ 的渐近线有(　　)

(A) 1 条.　　(B) 2 条.　　(C) 3 条.　　(D) 4 条.

(2) 设常数 $\lambda>0$,而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$(　　)

(A) 发散.　　(B) 条件收敛.　　(C) 绝对收敛.　　(D) 敛散性与 λ 有关.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{C}$ 是 n 阶可逆矩阵,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r,矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AC}$ 的秩为 r_1,则(　　)

(A) $r>r_1$.　　(B) $r<r_1$.　　(C) $r=r_1$.　　(D) r 与 r_1 的关系依 $\boldsymbol{C}$ 而定.

(4) 设 $0<P(A)<1$, $0<P(B)<1$, $P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$,则事件 A 和 B(　　)

(A) 互不相容.　　(B) 互相对立.　　(C) 不独立.　　(D) 独立.

(5) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本,$\overline{X}$ 是样本均值,记

$$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\quad S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,$$

$$S_3^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,\quad S_4^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,$$

则服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布的随机变量是(　　)

(A) $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n-1}}$.　(B) $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}$.　(C) $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_3/\sqrt{n}}$.　(D) $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_4/\sqrt{n}}$.

三、(本题满分 6 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant x+y+1\}$.

四、(本题满分 5 分)

设函数 $y=y(x)$ 满足条件

$$\begin{cases} y''+4y'+4y=0, \\ y(0)=2,\ y'(0)=-4, \end{cases}$$

求广义积分 $\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x$.

五、(本题满分 5 分)

已知 $f(x,y)=x^2\arctan\dfrac{y}{x}-y^2\arctan\dfrac{x}{y}$,求 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

六、(本题满分 5 分)

设函数 $f(x)$ 可导,且 $f(0)=0$, $F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\mathrm{d}t$,求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x^{2n}}$.

七、(本题满分 8 分)

已知曲线 $y=a\sqrt{x}\ (a>0)$ 与曲线 $y=\ln\sqrt{x}$ 在点 (x_0,y_0) 处有公共切线.求

(1) 常数 a 及切点 (x_0,y_0);

(2) 两曲线与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 V_x.

八、(本题满分 6 分)

假设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, $f''(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内存在且大于零,记

$$F(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\quad (x>a).$$

证明: $F(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内单调增加.

九、(本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3, \\ x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3, \\ x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3, \\ x_1+a_4x_2+a_4^2x_3=a_4^3, \end{cases}$$

(1) 证明:若 a_1,a_2,a_3,a_4 两两不相等,则此线性方程组无解;

(2) 设 $a_1=a_3=k$, $a_2=a_4=-k(k\neq 0)$,且已知 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 是该方程组的两个解,其中

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},$$

写出此方程组的通解.

十、(本题满分 8 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量,求 x 和 y 应满足的条件.

十一、(本题满分 8 分)

假设随机变量 X_1,X_2,X_3,X_4 相互独立,且同分布,

$$P\{X_i=0\}=0.6,\ P\{X_i=1\}=0.4(i=1,2,3,4).$$

求行列式 $X=\begin{vmatrix}X_1&X_2\\X_3&X_4\end{vmatrix}$ 的概率分布.

十二、(本题满分 8 分)

假设由自动线加工的某种零件的内径 X(毫米)服从正态分布 $N(\mu,1)$,内径小于 10 或大于 12 为不合格品,其余为合格品.销售每件合格品获利,销售每件不合格品亏损.已知销售利润 T(单位:元)与销售零件的内径 X 有如下关系:

$$T=\begin{cases}-1, & X<10,\\ 20, & 10\leqslant X\leqslant 12,\\ -5, & X>12.\end{cases}$$

问平均内径 μ 取何值时,销售一个零件的平均利润最大?

(试卷 Ⅴ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)【同试卷 Ⅳ 第一、(1) 题】　　(2)【同试卷 Ⅳ 第一、(2) 题】

(3)【同试卷 Ⅳ 第一、(3) 题】　　(4)【同试卷 Ⅳ 第一、(4) 题】

(5) 假设一批产品中一,二,三等品各占 60%,30%,10%,从中随意取出一件,结果不是三等品,则取到的是一等品的概率为______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)【同试卷 Ⅳ 第二、(1) 题】

(2) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)>0$,则方程 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=0$ 在开区间 (a,b) 内的根有(　　)

(A) 0 个.　(B) 1 个.　(C) 2 个.　(D) 无穷多个.

(3) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶非零矩阵,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的秩(　　)

(A) 必有一个等于零.　(B) 都小于 n.

(C) 一个小于 n，一个等于 n.　　(D) 都等于 n.

(4) 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-2,2,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(2,1,5,10)$，则该向量组的极大线性无关组是(　　)

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$.　(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5$.　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$.

(5)【同试卷 Ⅳ　第二、(4) 题】

三、(本题满分 5 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

四、(本题满　5 分)【同试卷 Ⅳ　第五题】

五、(本题满分 6 分)

已知 $\dfrac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x$.

六、(本题满分 8 分)

某养殖场饲养两种鱼，若甲种鱼放养 x(万尾)，乙种鱼放养 y(万尾)，收获时两种鱼的收获量分别为

$$(3-\alpha x-\beta y)x \text{ 和 } (4-\beta x-2\alpha y)y \quad (\alpha>\beta>0),$$

求使产鱼总量最大的放养数.

七、(本题满分 8 分)

已知曲线 $y=a\sqrt{x}\ (a>0)$ 与曲线 $y=\ln\sqrt{x}$ 在点 (x_0,y_0) 处有公共切线，求

(1) 常数 a 及切点 (x_0,y_0)；

(2) 两曲线与 x 轴围成的平面图形的面积 S.

八、(本题满分 7 分)【同试卷 Ⅳ　第六题】

九、(本题满分 8 分)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.证明 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 也是该方程组的一个基础解系.

十、(本题满分 8 分)【同试卷 Ⅳ　第十题】

十一、(本题满分 7 分)

假设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

现在对 X 进行 n 次独立重复观测，以 V_n 表示观测值不大于 0.1 的次数，试求随机变量 V_n 的概率分布.

十二、(本题满分 8 分)【同试卷 Ⅳ　第十二题】

1995 年全国硕士研究生招生考试试题

(试卷 Ⅳ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设$f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$,则$f^{(n)}(x)=$______.

(2) 设$z=xyf\left(\dfrac{y}{x}\right)$,$f(u)$可导,则$xz_x'+yz_y'=$______.

(3) 设$f'(\ln x)=1+x$,则$f(x)=$______.

(4) 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}^*$是$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵,则$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=$______.

(5) (超纲题) 设$X_1,\cdots,X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本,其中参数μ和σ^2未知,记$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$,$Q^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$,则假设$H_0:\mu=0$的$t$检验使用统计量$t=$______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设$f(x)$为可导函数,且满足条件$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$,则曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线斜率为(   )

(A) 2. (B) -1. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) -2.

(2) 下列广义积分发散的是(   )

(A) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$. (B) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$. (C) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$. (D) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2x}\mathrm{d}x$.

(3) 设矩阵$\boldsymbol{A}_{m\times n}$的秩为$r(\boldsymbol{A})=m<n$,$\boldsymbol{E}_m$为$m$阶单位矩阵,则下述结论中正确的是(   )

(A) $\boldsymbol{A}$的任意m个列向量必线性无关.

(B) $\boldsymbol{A}$的任意一个m阶子式不等于零.

(C) 若矩阵$\boldsymbol{B}$满足$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$,则$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

(D) $\boldsymbol{A}$通过初等行变换,必可以化为$(\boldsymbol{E}_m,\boldsymbol{O})$的形式.

(4) 设随机变量X和Y独立同分布,记$U=X-Y$,$V=X+Y$,则随机变量U与V必然(   )

(A) 不独立. (B) 独立.

(C) 相关系数不为零. (D) 相关系数为零.

(5) 设随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则随着σ的增大,概率$P\{|X-\mu|<\sigma\}$(   )

(A) 单调增大. (B) 单调减小. (C) 保持不变. (D) 增减不定.

三、(本题满分 6 分)

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}(1-\cos x), & x<0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t, & x>0,\end{cases}$ 试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性.

四、(本题满分 6 分)

已知连续函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x)=\int_0^{3x} f\left(\frac{t}{3}\right)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{2x}$,求 $f(x)$.

五、(本题满分 6 分)

将函数 $y=\ln(1-x-2x^2)$ 展成 x 的幂级数,并指出其收敛区间.

六、(本题满分 5 分)

计算二次积分 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\min\{x,y\}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

七、(本题满分 6 分)

设某产品的需求函数为 $Q=Q(P)$,收益函数为 $R=PQ$,其中 P 为产品价格,Q 为需求量(产品的产量),$Q(P)$ 是单调减函数. 如果当价格为 P_0,对应产量为 Q_0 时,边际收益 $\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}\right|_{Q=Q_0}=a>0$,收益对价格的边际效应 $\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}\right|_{P=P_0}=c<0$,需求对价格的弹性为 $E_P=b>1$,求 P_0 和 Q_0.

八、(本题满分 6 分)

设 $f(x)$, $g(x)$ 在区间 $[-a,a]$ $(a>0)$ 上连续, $g(x)$ 为偶函数,且 $f(x)$ 满足条件 $f(x)+f(-x)=A$ (A 为常数).

(1) 证明 $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x=A\int_0^a g(x)\mathrm{d}x$;

(2) 利用(1) 的结论计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\arctan \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

九、(本题满分 9 分)

已知向量组(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$;(Ⅱ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$;(Ⅲ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$. 如果各向量组的秩分别为 $r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})=3$,$r(\text{Ⅲ})=4$.

证明:向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 4.

十、(本题满分 10 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$.

(1) 写出二次型 f 的矩阵表达式;

(2) 用正交变换把二次型 f 化为标准形,并写出相应的正交矩阵.

十一、(本题满分 8 分)

假设一厂家生产的每台仪器,以概率 0.70 可以直接出厂;以概率 0.30 需进一步调试,经调试后以概率 0.80 可以出厂;以概率 0.20 定为不合格品不能出厂. 现该厂生产了 $n(n \geqslant 2)$ 台仪器(假设各台仪器的生产过程相互独立). 求

(1) 全部能出厂的概率 α;

(2) 其中恰好有两台不能出厂的概率 β;

(3) 其中至少有两台不能出厂的概率 θ.

十二、(本题满分 8 分)

已知随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 X 和 Y 的联合分布函数 $F(x,y)$.

(试卷 V)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{ax}=\int_{-\infty}^{a} te^{t}\mathrm{d}t$,则常 $a=$______.

(2)【同试卷 Ⅳ 第一、(2) 题】

(3)【同试卷 Ⅳ 第一、(3) 题】

(4)【同试卷 Ⅳ 第一、(4) 题】

(5) 设 X 是一个随机变量,其概率密度为 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -1 \leqslant x \leqslant 0,\\ 1-x, & 0 < x \leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 则方差 $D(X)=$______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)【同试卷 Ⅳ 第二、(1) 题】

(2)【同试卷 Ⅳ 第二、(2) 题】

(3) 设 n 维行向量 $\boldsymbol{\alpha}=\left(\dfrac{1}{2},0,\cdots,0,\dfrac{1}{2}\right)$,矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,则 $\boldsymbol{AB}$ 等于(　　)

(A) $\boldsymbol{O}$.　(B) $-\boldsymbol{E}$.　(C) $\boldsymbol{E}$.　(D) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

(4) 设矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的秩为 $r(\boldsymbol{A})=m<n$,$\boldsymbol{E}_m$ 为 m 阶单位矩阵,下述结论中正确的是(　　)

(A) $\boldsymbol{A}$ 的任意 m 个列向量必线性无关.

(B) $\boldsymbol{A}$ 的任意一个 m 阶子式不等于零.

(C) 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 一定有无穷多解.

(D) $\boldsymbol{A}$ 通过初等行变换,必可以化为 $(\boldsymbol{E}_m,\boldsymbol{O})$ 的形式.

(5)【同试卷 Ⅳ　第二、(5) 题】

三、(本题满分 6 分)【同试卷 Ⅳ　第三题】

四、(本题满分 6 分)

求不定积分$\int(\arcsin x)^2 \mathrm{d}x$.

五、(本题满分 7 分)【同试卷 Ⅳ　第八题】

六、(本题满分 6 分)【同试卷 Ⅳ　第七题】

七、(本题满分 5 分)

设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,证明:在(a,b)内至少存在一点ξ,使$\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$.

八、(本题满分 9 分)

求二元函数$z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$在由直线$x+y=6$, x轴和y轴所围成的闭区域D上的极值,最大值与最小值.

九、(本题满分 8 分)

对于线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2,\end{cases}$ 讨论λ取何值时,方程组无解,有唯一解和无穷多组解.在方程组有无穷多组解时,试用其导出组的基础解系表示全部解.

十、(本题满分 8 分)

设 3 阶矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i=i\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$,其中列向量$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-2,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,-1,2)^{\mathrm{T}}$. 试求矩阵$\boldsymbol{A}$.

十一、(本题满分 8 分)【同试卷 Ⅳ　第十一题】

十二、(本题满分 7 分)

假设随机变量X服从参数为 2 的指数分布,证明:$Y=1-\mathrm{e}^{-2X}$在区间$(0,1)$上服从均匀分布.

1996 年全国硕士研究生招生考试试题

(试卷 Ⅳ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设方程 $x=y^y$ 确定 y 是 x 的函数,则 $\mathrm{d}y=$______.

(2) 设 $\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$,则 $\int \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=$______.

(3) 设 (x_0,y_0) 是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上的一点.若在该点的切线过原点,则系数应满足的关系是______.

(4) 设

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&a_3^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

其中 $a_i\neq a_j(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$,则线性方程组 $A^{\mathrm{T}}X=B$ 的解是______.

(5) (超纲题) 设由来自正态总体 $X\sim N(\mu,0.9^2)$ 容量为 9 的简单随机样本,得样本均值 $\overline{X}=5$,则未知参数 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 可以写成(　　)

(A) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

(C) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$.　　(D) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

(2) 下述各选项正确的是(　　)

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 都收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛.

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_nv_n|$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 都收敛.

(C) 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散,则 $u_n\geqslant\frac{1}{n}$.

(D) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,且 $u_n\geqslant v_n(n=1,2,\cdots)$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 也收敛.

(3) 设 n 阶矩阵 A 非奇异$(n\geqslant 2)$, A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵,则(　　)

(A) $(A^*)^*=|A|^{n-1}A$.　　(B) $(A^*)^*=|A|^{n+1}A$.

(C) $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$.　　(D) $(A^*)^*=|A|^{n+2}A$.

(4) 设有任意两个 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$，若存在两组不全为零的数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 和 $k_1,\cdots,k_m$，使 $(\lambda_1+k_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(\lambda_m+k_m)\boldsymbol{\alpha}_m+(\lambda_1-k_1)\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+(\lambda_m-k_m)\boldsymbol{\beta}_m=\mathbf{0}$，则(　　)

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 都线性相关.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 都线性无关.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关.

(5) 已知 $0<P(B)<1$ 且 $P[(A_1+A_2)\mid B]=P(A_1\mid B)+P(A_2\mid B)$，则下列选项成立的是(　　)

(A) $P[(A_1+A_2)\mid \overline{B}]=P(A_1\mid \overline{B})+P(A_2\mid \overline{B})$.

(B) $P(A_1B+A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$.

(C) $P(A_1+A_2)=P(A_1\mid B)+P(A_2\mid B)$.

(D) $P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)$.

三、(本题满分 6 分)

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 有二阶连续导数，且 $g(0)=1$，$g'(0)=-1$.

(1) 求 $f'(x)$；

(2) 讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性.

四、(本题满分 6 分)

设函数 $z=f(u)$，方程 $u=\varphi(u)+\int_y^x p(t)\mathrm{d}t$ 确定 u 是 x,y 的函数，其中 $f(u)$，$\varphi(u)$ 可微；$p(t)$，$\varphi'(u)$ 连续，且 $\varphi'(u)\neq 1$. 求 $p(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+p(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

五、(本题满分 6 分)

计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\mathrm{d}x$.

六、(本题满分 5 分)

设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可微，且满足条件 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\mathrm{d}x$. 试证：存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

七、(本题满分 6 分)

设某种商品的单价为 p 时，售出的商品数量 Q 可以表示成 $Q=\dfrac{a}{p+b}-c$，其中 a,b,c 均为正数，且 $a>bc$.

(1) 求 p 在何范围变化时，使相应销售额增加或减少；

(2) 要使销售额最大，商品单价 p 应取何值？最大销售额是多少？

八、(本题满分 6 分)

求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ 的通解.

九、(本题满分 8 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&y&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$.

(1) 已知 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为 3,试求 y;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使$(\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AP})$ 为对角矩阵.

十、(本题满分 8 分)

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 是齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系,向量$\boldsymbol{\beta}$ 不是方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解,即 $\boldsymbol{A\beta}\neq\boldsymbol{0}$. 试证明:向量组$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关.

十一、(本题满分 7 分)

假设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2,机器发生故障时全天停止工作.若一周 5 个工作日里无故障,可获利润 10 万元;发生一次故障仍可获利润 5 万元;发生二次故障所获利润 0 元;发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元. 求一周内利润的期望是多少?

十二、(本题满分 6 分)

考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$,其中 B,C 分别是将一枚色子(骰子)接连掷两次先后出现的点数, 求该方程有实根的概率 p 和有重根的概率 q.

十三、(本题满分 6 分)

假设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.已知 $E(X^k)=\alpha_k(k=1,2,3,4)$. 证明:当 n 充分大时,随机变量 $Z_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$近似服从正态分布,并指出其分布参数.

(试卷 V)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)【同试卷 Ⅳ　第一、(1) 题】

(2)【同试卷 Ⅳ　第一、(2) 题】

(3) 设 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$,则 $y'''\big|_{x=\sqrt{3}}=$ ______.

(4) 5 阶行列式 $\begin{vmatrix}1-a&a&0&0&0\\-1&1-a&a&0&0\\0&-1&1-a&a&0\\0&0&-1&1-a&a\\0&0&0&-1&1-a\end{vmatrix}=$ ______.

(5) 一实习生用同一台机器接连独立地制造 3 个同种零件，第 i 个零件是不合格品的概率 $P_i = \frac{1}{i+1}(i=1,2,3)$，以 X 表示 3 个零件中合格品的个数，则 $P\{X=2\} =$ ______.

二、选择题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)>0$，则下列选项正确的是(　　)

(A) $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值.

(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(C) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(D) $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(2) 设 $f(x)$ 处处可导，则(　　)

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$.

(C) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

(D) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$.

(3)【同试卷 Ⅳ　第二、(3) 题】

(4)【同试卷 Ⅳ　第二、(4) 题】

(5) 设 A,B 为任意两个事件，且 $A\subset B$，$P(B)>0$，则下列选项必然成立的是(　　)

(A) $P(A)<P(A|B)$.

(B) $P(A)\leqslant P(A|B)$.

(C) $P(A)>P(A|B)$.

(D) $P(A)\geqslant P(A|B)$.

三、(本题满分 6 分)【同试卷 Ⅳ　第三题】

四、(本题满分 7 分)

设 $f(x,y)=\int_0^{xy} e^{-t^2}dt$，求 $\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

五、(本题满分 6 分)【同试卷 Ⅳ　第五题】

六、(本题满分 7 分)【同试卷 Ⅳ　第七题】

七、(本题满分 9 分)

已知一抛物线通过 x 轴上的两点 $A(1,0)$，$B(3,0)$.

(1) 求证：两坐标轴与该抛物线所围图形的面积等于 x 轴与该抛物线所围图形的面积；

(2) 计算上述两平面图形绕 x 轴旋转一周所产生的两个旋转体体积之比.

八、(本题满分 6 分)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=f(b)$. 求证：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=0$.

九、(本题满分 9 分)

已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1, \\ 3x_1+2x_2+px_3+7x_4=-1, \\ x_1-x_2-6x_3-x_4=t. \end{cases}$$

讨论参数 p,t 取何值时,方程组有解、无解;当有解时,试用其导出组的基础解系表示其通解.

十、(本题满分 7 分)

设有 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足条件 $|3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{E}$, $|\boldsymbol{A}|<0$,其中 $\boldsymbol{E}$ 是 4 阶单位阵.求方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的一个特征值.

十一、(本题满分 7 分)【同试卷 Ⅳ　第十一题】

十二、(本题满分 6 分)

假设一电路装有三个同种电气元件,其工作状态相互独立,且无故障工作时间都服从参数为 $\lambda>0$ 的指数分布.当三个元件都无故障时,电路正常工作,否则整个电路不能正常工作.试求电路正常工作的时间 T 的概率分布.

1987 年真题参考答案

(试卷 Ⅳ)

一、判断题

(1) ×. (2)√. (3) ×. (4)√ . (5)√.

二、选择题

(1) A. (2) C. (3) C. (4) A. (5) C.

三、(1)e. (2) $\dfrac{2}{x\sqrt{1+x^2}}$. (3)$\mathrm{d}z=\dfrac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$.

(4)$(\sqrt{2x-1}-1)\mathrm{e}^{\sqrt{2x-1}}+C$,其中 C 为任意常数.

四、(1) 当 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 时,S_1+S_2 最小. (2) 当 $t=0$ 时,S_1+S_2 最大.

五、$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)x^n$,收敛区间为$(-1,1)$.

六、$\dfrac{\mathrm{e}}{2}-1$.

七、$x=\mathrm{e}^{-p^3}$.

八、$(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=k(-1,2,1,0)^{\mathrm{T}}+(3,-8,0,6)^{\mathrm{T}}$,其中 k 为任意常数.

九、$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&-8&-6\\2&-9&-6\\-2&12&9\end{pmatrix}$.

十、特征值 $\lambda=1$,特征向量为 $k(0,2,1)^{\mathrm{T}}$,其中 k 为任意非零常数.

十一、(1)$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\0.2, & 1\leqslant x<2,\\0.5, & 2\leqslant x<3,\\1, & x\geqslant 3.\end{cases}$ (2) $\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2a}$.

十二、(1) $\dfrac{2}{5}$. (2)0.48557.

(试卷 Ⅴ)

一、判断题

(1)【同试卷 Ⅳ 第一、(1) 题】 (2)【同试卷 Ⅳ 第一、(2) 题】

(3) ×. (4) ×.

(5)【同试卷 Ⅳ 第一、(5) 题】

二、选择题

(1)【同试卷 Ⅳ 第二、(1) 题】 (2) 同试卷 Ⅳ 第二、(2) 题】

(3)【同试卷 Ⅳ 第二、(3) 题】 (4)【同试卷 Ⅳ 第二、(4) 题】 (5) C.

三、(1)1.　　(2)【同试卷 Ⅳ　第三、(2) 题】　　(3)【同试卷 Ⅳ　第三、(3) 题】

(4)1.　　(5) $\frac{1}{4}\arctan\frac{x^2+1}{2}+C$,其中 C 为任意常数.

四、(1) 当 $t=\frac{1}{2}$ 时,S_1+S_2 最小.　(2) 当 $t=1$ 时,S_1+S_2 最大.

五、【同试卷 Ⅳ　第六题】

六、(1) 边际成本为 $\frac{dC(x)}{dx}=3+x$.　　(2) 边际收益为 $\frac{dR(x)}{dx}=\frac{50}{\sqrt{x}}$.

(3) 边际利润为 $\frac{d(R-C)}{dx}=\frac{50}{\sqrt{x}}-3-x$.　　(4) 收益对价格的弹性为 -1.

七、【同试卷 Ⅳ　第八题】

八、【同试卷 Ⅳ　第九题】

九、【同试卷 Ⅳ　第十题】

十、$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ 0.2, & 1\leqslant x<2,\\ 0.5, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3.\end{cases}$, $E(X)=2.3$, $D(X)=0.61$.

十一、【同试卷 Ⅳ　第十二题】

1988 年真题参考答案

(试卷 Ⅳ)

一、填空题

(1) $e^{-\frac{1}{2}x^2}$;在$(-\infty,+\infty)$上单调增;奇函数;$(0,0)$;在$(-\infty,0)$上是凹的,在$(0,+\infty)$上是凸的;$y=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

(2) -3. (3) $\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$. (4)0.3;0.5.

二、(1) ×. (2) ×. (3) ×. (4) √. (5) ×.

三、(1)1. (2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{1+e^u}-\frac{xye^u}{(1+e^u)^3}$. (3) $\frac{2\pi}{3}$. (4) $\frac{1}{2}$.

四、(1) 级数收敛. (2) 证明略.(可利用$|a_nb_n|\leqslant\frac{1}{2}(a_n^2+b_n^2)$和比较审敛法.)

五、(1)$p_e=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$. (2)$p(t)=[p_e^3+(1-p_e^3)e^{-3kbt}]^{\frac{1}{3}}$. (3) $\lim\limits_{t\to+\infty}p(t)=p_e$.

六、(1)(1,1). (2)$y=2x-1$. (3) $\frac{\pi}{30}$.

七、$k_1\neq2$时,方程组有唯一解;$k_1=2$且$k_2\neq1$时,方程组无解;$k_1=2$且$k_2=1$时,方程组有无穷多解,其解为:$(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=k(0,-2,1,0)^T+(-8,3,0,2)^T$,其中$k$为任意常数.

八、s为奇数时,向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性无关;$s$为偶数时,向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性相关.

九、$-\frac{16}{27}$.

十、(1)$\alpha=\frac{448}{475}\approx0.94$. (2)$\beta\approx0.85$.

十一、(1)$P\{X=k\}=C_{100}^k0.2^k0.8^{100-k}(k=0,1,\cdots,100)$. (2)0.927.

十二、$f(y)=\begin{cases}\frac{1}{2y}, & e^2<y<e^4,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$

(试卷 Ⅴ)

一、【同试卷 Ⅳ 第一题】

二、【同试卷 Ⅳ 第二题】

三、(1) $\frac{4}{\pi}$. (2) $-\frac{x+y}{y^3}e^{\frac{x}{y}}$.

(3)【同试卷 Ⅳ　第三、(3) 题】

(4)【同试卷 Ⅳ　第三、(4) 题】

四、$a=2, b=-1$.

五、当圆的周长为$\dfrac{\pi a}{4+\pi}$,正方形的周长为$\dfrac{4a}{4+\pi}$时,两图形的面积之和为最小.

六、【同试卷 Ⅳ　第六题】

七、【同试卷 Ⅳ　第七题】

八、证明略. $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})$.

九、【同试卷 Ⅳ　第八题】

十、【同试卷 Ⅳ　第十题】

十一、(1)$P\{X=0\}=\dfrac{4}{5}, P\{X=1\}=\dfrac{8}{45}, P\{X=2\}=\dfrac{1}{45}$.

(2)$E(X)=\dfrac{2}{9}$.　(3)$D(X)=\dfrac{88}{405}$.

十二、【同试卷 Ⅳ　第十二题】

1989 年真题参考答案

（试卷 Ⅳ）

一、填空题

（1）$y=x+1$. （2）$[-1,1)$. （3）λ 为不等于 1 的任意常数. （4）$1;\frac{1}{2}$. （5）$\frac{1}{9}$.

二、选择题

（1）B. （2）C. （3）C. （4）C. （5）D.

三、（1）e. （2）$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(x+y)\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+xy\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial v}$.

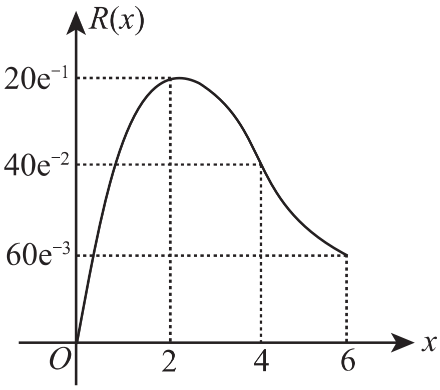
（3）$y(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}+e^{-x}$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

四、（1）收益函数 $R(x)=10xe^{-\frac{x}{2}}$，$0\leqslant x\leqslant 6$，边际收益函数为

$\frac{dR}{dx}=5(2-x)e^{-\frac{x}{2}}$.

（2）当产量为 2 时，收益最大，最大值为 $20e^{-1}$，相应的价格为 $10e^{-1}$.

（3）如右图.



五、（1）$(1-e^{-1})^2$. （2）$e^{-2}(1-e^{-1})^2$. （3）$e^{-2n}(1-e^{-1})^2$.

（4）$\frac{e-1}{e+1}$.

六、证明略.（可利用积分中值定理.）

七、$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

八、（1）当 $t\neq 5$ 时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

（2）当 $t=5$ 时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

（3）当向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关时，$\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

九、（1）1，1，-5. （2）2，2，$\frac{4}{5}$.

十、（1）$\frac{1}{2}$. （2）1.

十一、$\frac{20}{27}$.

（试卷 Ⅴ）

一、填空题

（1）【同试卷 Ⅳ　第一、（1）题】 （2）b. （3）x^4. （4）46. （5）【同试卷 Ⅳ　第一、（4）题】

二、选择题

(1)【同试卷 Ⅳ　第二、(1)题】　(2)【同试卷 Ⅳ　第二、(2)题】

(3)【同试卷 Ⅳ　第二、(3)题】　(4) B.　(5)【同试卷 Ⅳ　第二、(5)题】

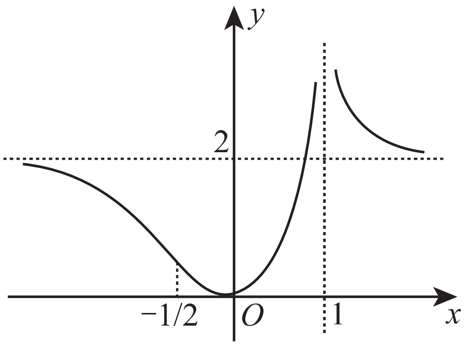
三、(1) e.　(2) $\mathrm{d}z=\dfrac{z\ln a}{\sqrt{x^2-y^2}}(x\mathrm{d}x-y\mathrm{d}y)$.

(3) $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\ln(1-x)+C$，其中 C 为任意常数.　(4) $\dfrac{\pi}{2}\left(\ln 2-\dfrac{1}{2}\right)$.

四、(1) 利润函数 $L=R-C=18x-3x^2-4x^3$.　(2) 边际收入函数 $MR=\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}=26-4x-12x^2$.

(3) 边际成本函数 $MC=\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}=8+2x$.　(4) 当产量为 1 时，利润最大，最大利润为 11.

五、函数的单增区间为 $(0,1)$，单减区间为 $(-\infty,0)$，$(1,+\infty)$. 函数在点 $x=0$ 处取得极小值，极小值为 0. 函数图形在 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$ 上是凸的，在 $\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$ 和 $(1,+\infty)$ 上是凹的，$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{9}\right)$ 是曲线的拐点. $y=2$ 为图形的水平渐近线，$x=1$ 为图形的铅直渐近线.



六、【同试卷 Ⅳ　第七题】

七、当 $t\neq 1$ 时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；当 $t=1$ 时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

八、【同试卷 Ⅳ　第九题】

九、(1)

x	0	1	2
$P\{X=x\}$	0.25	0.45	0.30

(2)

s	0	1	2	3
$P\{X+Y=s\}$	0.10	0.40	0.35	0.15

(3) 0.25.

十、$1-\mathrm{e}^{-1}$.

1990 年真题参考答案

(试卷 Ⅳ)

一、填空题

(1)2. (2)$a+b$. (3) $\frac{9}{2}$. (4)$a_1+a_2+a_3+a_4=0$. (5) $\frac{2}{3}$.

二、选择题

(1) B. (2) D. (3) C. (4) A. (5) C.

三、(1)$\ln(1+\mathrm{e})-\frac{\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}$. (2) $\frac{5}{144}$. (3)$[2,4]$.

(4)$y=\mathrm{e}^{-\sin x}(x\ln x-x+C)$,其中 C 为任意常数.

四、(1) 当 $x_1=0.75$, $x_2=1.25$ 时,利润取最大值.

(2) 当仅有 1.5 万元广告费用时,最优广告策略是将 1.5 万元费用全部用于报纸的广告费.

五、证明略.(在$[0,a]$和$[b,a+b]$上分别应用拉格朗日中值定理.)

六、(1) $a=1$, $b=3$.

(2) 基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,-2,1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_2=(1,-2,0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_3=(5,-6,0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

(3) 方程的全部解为 $\boldsymbol{x}=(-2,3,0,0,0)^{\mathrm{T}}+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3$,其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数.

七、证明略.(可利用$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1})=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^k\xlongequal{\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}}\boldsymbol{E}$.)

$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}$.

八、证明略.(反证法.)

九、$P(A_1)=\frac{7}{15}$;$P(A_2)=\frac{14}{15}$;$P(A_3)=\frac{7}{30}$.

十、(1)X 和 Y 独立. (2)$\mathrm{e}^{-0.1}$.

十一、0.682.

(试卷 Ⅴ)

一、填空题

(1)【同试卷 Ⅳ 第一、(1) 题】 (2)【同试卷 Ⅳ 第一、(2) 题】

(3)【同试卷 Ⅳ 第一、(3) 题】 (同试卷 Ⅳ 第一、(4) 题】

(5)$N(0,5)$.

二、选择题

(1)【同试卷 Ⅳ 第二、(1) 题】 (2 同试卷 Ⅳ 第二、(2) 题】

(3)【同试卷 Ⅳ 第二、(3) 题】 (4) A. (5) B.

三、(1) $\frac{1}{2}$. (2) $-\frac{1}{8}x\csc^2\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\cot\frac{x}{2}+C$,其中 C 为任意常数.

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y\varphi\left(\dfrac{z}{y}\right)-z\varphi\left(\dfrac{z}{y}\right)}{2yz-y\varphi'\left(\dfrac{z}{y}\right)}$.　(4)【同试卷 Ⅳ　第三、(2) 题】

四、【同试卷 Ⅳ　第四题】

五、证明略.(可考虑函数 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$,计算 $f'(x)$,证明 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)=0$.)

六、$\lambda^{10}-10^{10}$.

七、证明略.(考虑 $(\boldsymbol{Ax})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax})$,利用 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 可得 $(\boldsymbol{Ax})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$.)

八、【同试卷 Ⅳ　第六题】

九、【同试卷 Ⅳ　第九题】

十、

Y \ X	0	1	2
0	0.16	0.08	0.01
1	0.32	0.16	0.02
2	0.16	.08	.01

十一、【同试卷 Ⅳ　第十一题】

1991 年真题参考答案

(试卷 Ⅳ)

一、填空题

(1) $e^{\sin(xy)}\cos(xy)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$.　(2) -1; -1; 1.　(3) $-(n+1)$; $-\frac{1}{e^{n+1}}$.

(4) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.

(5)

X	-1	1	3
P	0.4	0.4	0.2

二、选择题

(1) A.　(2) D.　(3) B.　(4) D.　(5) B.

三、$e^{\frac{n+1}{2}}$.

四、$\frac{ab^2}{30}$.

五、$y=x\sqrt{2(\ln x+1)}\ (x\geqslant e^{-1})$.(可求得 $y^2=2x^2(\ln|x|+1)$.但是,满足初始条件 $y|_{x=e}=2e$ 的特解为 $y=x\sqrt{2(\ln x+1)}\ (x\geqslant e^{-1})$.其余的三个连续函数:$y=-x\sqrt{2(\ln x+1)}\ (x\geqslant e^{-1})$, $y=-x\sqrt{2[\ln(-x)+1]}\ (x\leqslant -e^{-1})$, $y=x\sqrt{2[\ln(-x)+1]}\ (x\leqslant -e^{-1})$ 都不满足 $y|_{x=e}=2e$.)

六、$a=3$.

七、当 $p_1=80$, $p_2=120$ 时,总利润最大,最大利润为 605.

八、证明略.($f(x)=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$,计算 $f'(x)$,并证明 $f'(x)>0$.)

九、(1) 当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq -3$ 时, $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一地线性表示.

(2) 当 $\lambda=0$ 时, $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,但表达式不唯一.

(3) 当 $\lambda=-3$ 时, $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

十、$-2<\lambda<1$.

十一、证明略.(记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,利用 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^2=D$.)

十二、$P\{X=0\}=\frac{1}{2}$; $P\{X=1\}=\frac{1}{4}$; $P\{X=2\}=\frac{1}{8}$; $P\{X=3\}=\frac{1}{8}$.

十三、(1) $\rho=0$.　(2) X 和 Y 不独立.

十四、$\hat{\lambda}=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^{a}}$.

(试卷 Ⅴ)

一、填空题

(1)【同试卷 Ⅳ　第一、(1) 题】　(2)【同试卷 Ⅳ　第一、(2) 题】

(3)【同试卷 Ⅳ　第一、(3) 题】　(4) $a^n+(-1)^{n+1}b^n$.　(5) 0.6.

二、选择题

(1)【同试卷 Ⅳ 第二、(1) 题】 (2) D. (3) C. (4) D. (5)【同试卷 Ⅳ 第二、(4) 题】

三、1.

四、$\frac{22}{3}$.

五、$x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C$,其中 C 为任意常数.

六、证明略.(可对 $xy = xf(z) + yg(z)$ 两边同时分别关于 x, y 求偏导数.)

七、【同试卷 Ⅳ 第六题】

八、【同试卷 Ⅳ 第七题】

九、证明略.(可考虑函数 $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1 + x}$,计算 $f'(x)$,并利用 $f(x)$ 的单调性.)

十、(1) 证明略.(注意到 $\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} + \boldsymbol{E} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{E}$.)

(2) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

十一、【同试卷 Ⅳ 第九题】

十二、$k = 1$ 或 $k = -2$.

十三、(1)【同试卷 Ⅳ 第十二题】 (2) $\frac{67}{96}$.

十四、(1) $\alpha = 0.064$. (2) $\beta \approx 0.009$.

1992 年真题参考答案

(试卷 Ⅳ)

一、填空题

(1) $(10,20]$. (2) $(0,4)$. (3) $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^{\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$.

(4) $(-1)^{mn}ab$. (5) $\frac{1}{1\ 260}$.

二、选择题

(1) B. (2) D. (3) A. (4) B. (5) C.

三、函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续.若修改定义,令 $f(1)=-\frac{4}{\pi^2}$,则函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

四、$-e^{-x}\operatorname{arccot} e^x-x+\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C$,其中 C 为任意常数.

五、$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos(xy)-xy\sin(xy)-\frac{1}{y^2}\varphi_v'-\frac{x}{y^2}\varphi_{uv}''-\frac{x}{y^3}\varphi_{vv}''$.

六、$f(x)=\frac{1}{2}e^{-2x}+x-\frac{1}{2}$.

七、证明略.(可考虑函数 $f(x)=\arctan x-\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}-\frac{\pi}{4}$,证明 $f'(x)\equiv 0$.)

八、(1) $V(\xi)=\frac{\pi}{2}(1-e^{-2\xi})$, $a=\frac{1}{2}\ln 2$. (2) 所求切点为 $\left(1,\frac{1}{e}\right)$,最大面积为 $\frac{2}{e}$.

九、(1) $x=0$, $y=-2$. (2) $P=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&1&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}$.

十、(1) $\lambda=1$. (2) 证明略.(反证法.)

十一、C 是正定矩阵.

十二、$\alpha=1-0.95^{100}-100\times0.05\times0.95^{99}-\frac{100\times99}{2}\times0.05^2\times0.95^{98}$,利用泊松分布,$\alpha\approx0.87$.

十三、$X\sim\begin{pmatrix}0&1&2&3\\0.504&0.398&0.092&0.006\end{pmatrix}$, $E(X)=0.6$, $D(X)=0.46$.

十四、(1) $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$ (2) $P\{X+Y\leqslant 1\}=1+e^{-1}-2e^{-\frac{1}{2}}$.

(试卷 Ⅴ)

一、填空题

(1) $(2t+1)e^{2t}$. (2)【同试卷 Ⅳ 第一、(1) 题】 (3) $\arcsin(1-x^2)$; $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

(4)4. (5) $\frac{5}{8}$.

二、选择题

(1)【同试卷 Ⅳ 第二、(1) 题】 (2) D. (3) C. (4) B. (5)【同试卷 Ⅳ 第二、(4) 题】

三、$-\frac{4}{\pi^2}$.

四、【同试卷 Ⅳ 第四题】

五、$f(x)=\cos x-x\sin x+C$,其中 C 为任意常数.

六、【同试卷 Ⅳ 第五题】

七、(1) 总利润函数 $R-C=-10+72x+15x^2-x^3$. (2) 当产量为 12 时,总利润最大.

八、证明略.(可考虑函数 $f(x)=x+p+q\cos x$,利用介值定理.)

九、(1) 所求切线方程为 $y-\frac{1}{x_0^2}=-\frac{2}{x_0^3}(x-x_0)$. (2) 所求长度为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

十、$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$.

十一、$\lambda=1$.

十二、$|\boldsymbol{A}|=1$.

十三、【同试卷 Ⅳ 第十二题】

十四、【同试卷 Ⅳ 第十三题】

1993 年真题参考答案

（试卷 Ⅳ）

一、填空题

（1）$\frac{6}{5}$.　（2）$\frac{3}{4}\pi$.　（3）$\frac{2}{2-\ln 3}$.　（4）0.　（5）(4.804,5.196).

二、选择题

（1）C.　（2）A.　（3）B.

（4）考题有误，没有正确选项. 由 $P(B\mid A)=1$ 可得 $P(AB)=P(A)$. $A\subset B$ 是 $P(B\mid A)=1$ 的充分条件，但不是必要条件. 随机变量 X 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，记 $A=\left\{0\leqslant X\leqslant \frac{1}{2}\right\}$，$B=\left\{0<X<\frac{2}{3}\right\}$，则 $P(B\mid A)=1$，但 $A\not\subseteq B$，从而选项 D 不对，易知其余三个选项也都不对.

（5）B.

三、$\mathrm{d}z=\frac{1+(x-1)\mathrm{e}^{z-y-x}}{1+x\mathrm{e}^{z-y-x}}\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$.

四、$a=0$ 或 $a=-1$.

五、（1）当产量 $q=\frac{d-b}{2(e+a)}$ 时，利润最大，最大值 $L=\frac{(d-b)^2}{4(e+a)}-c$.

（2）需求对价格的弹性为 $\eta=\frac{d-eq}{eq}$.　（3）$q=\frac{d}{2e}$.

六、所求函数为 $f(x)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$.

七、证明略.（过 A,B 两点的直线与曲线 $y=f(x)$ 有 3 个交点，A,B,C. 构造函数 $y=g(x)$，使得 $g(0)=g(c)=g(1)=0$，利用罗尔定理.）

八、当 $k\neq -1,4$ 时，方程组有唯一解，$\boldsymbol{x}=\left(\frac{k^2+2k}{k+1},\frac{k^2+2k+4}{k+1},\frac{-2k}{k+1}\right)^{\mathrm{T}}$；当 $k=-1$ 时，方程组无解；当 $k=4$ 时，方程组有无穷多解，全部解为 $\boldsymbol{x}=k(-3,-1,1)^{\mathrm{T}}+(0,4,0)^{\mathrm{T}}$，其中 k 为任意常数.

九、$\alpha=\beta=0$.

十、（1）$a=\sqrt[3]{4}$.（2）$\frac{3}{4}$.

十一、（1）当 $t<0$ 时，$F(t)=P\{T\leqslant t\}=0$；当 $t\geqslant 0$ 时，$F(t)=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}$. T 服从参数为 λ 的指数分布.

（2）$Q=\mathrm{e}^{-8\lambda}$.

(试卷 Ⅴ)

一、填空题

(1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (2) $\frac{3\pi}{2}$. (3) $-2\arctan\sqrt{1-x}+C$,其中 C 为任意常数.

(4)【同试卷 Ⅳ　第一、(4) 题】 (5) $\frac{1}{5}$.

二、选择题

(1)【同试卷 Ⅳ　第二、(1) 题】　(2)【同试卷 Ⅳ　第二、(2) 题】

(3) C. (4) B. (5) A.

三、【同试卷 Ⅳ　第三题】

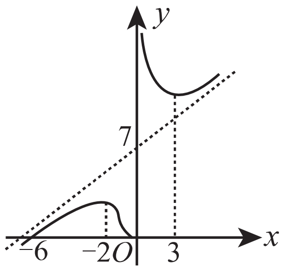
四、【同试卷 Ⅳ　第四题】

五、(1) 要使平均成本最小,应生产 1 000 件产品.

(2) 要使利润最大,应生产 6 000 件产品.

六、证明略.(令 $f(x)=\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}-x$,利用导数来分析 $f(x)$ 的最值.)

七、如右图.



八、$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\begin{pmatrix}5 & -2 & -1\\ -2 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

九、$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关.理由略.($\boldsymbol{BA}\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}=\mathbf{0}.\Rightarrow k_1=k_2=\cdots=k_n=0.$)

十、(1) $a=\frac{5}{3}$ 或 $\frac{7}{3}$. (2) $\frac{1}{2}\ln 3$.

十一、【同试卷 Ⅳ　第十一题】

1994 年真题参考答案

(试卷 Ⅳ)

一、填空题

(1)$\ln 3$.　(2)1.　(3) $-\dfrac{ye^{xy}+\sin x}{xe^{xy}+2y}$.　(4)$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{1}{a_n} \\ \dfrac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$.　(5) $\dfrac{9}{64}$.

二、选择题

(1) B.　(2) C.　(3) C.　(4) D.　(5) B.

三、$\dfrac{3}{2}\pi$.

四、1.

五、$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

六、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x^{2n}}=\dfrac{1}{2n}f'(0)$.

七、(1)$a=\dfrac{1}{e}$,切点为$(e^2,1)$.　(2) $\dfrac{\pi}{2}$.

八、证明略.(证明 $F'(x)>0(x>a)$.)

九、(1) 证明略.(原线性方程组的增广矩阵的行列式是一个范德蒙德行列式.)

(2) $\boldsymbol{x}=k(2,0,-2)^{\mathrm{T}}+(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$,其中 k 为任意常数.

十、$x+y=0$.

十一、$X\sim\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.1344 & 0.7312 & 0.1344 \end{pmatrix}$.

十二、当 $\mu\approx 10.9$ 毫米时,平均利润最大.

(试卷 Ⅴ)

一、填空题

(1)【同试卷 Ⅳ　第一、(1) 题】　　(2)【同试卷 Ⅳ　第一、(2) 题】

(3)【同试卷 Ⅳ　第一、(3) 题】　　(4)【同试卷 Ⅳ　第一、(4) 题】　　(5) $\dfrac{2}{3}$.

二、选择题

(1)【同试卷 Ⅳ 第二、(1) 题】 (2) B. (3) B. (4) B. (5)【同试卷 Ⅳ 第二、(4) 题】

三、$\frac{1}{2}$.

四、【同试卷 Ⅳ 第五题】

五、$x^2\cos x - 4x\sin x - 6\cos x + C$,其中 C 为任意常数.

六、甲种鱼放养数为$\frac{3\alpha - 2\beta}{2\alpha^2 - \beta^2}$，乙种鱼放养数为$\frac{4\alpha - 3\beta}{2(2\alpha^2 - \beta^2)}$时,产鱼总量最大.

七、(1)$a = \frac{1}{e}$,切点为$(e^2,1)$. (2)$S = \frac{1}{6}e^2 - \frac{1}{2}$.

八、【同试卷 Ⅳ 第六题】

九、证明略.(先证明$\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1$都是$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$的解,再证明$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) + k_2(\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) + k_3(\boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1) = \boldsymbol{0} \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0$.)

十、【同试卷 Ⅳ 第十题】

十一、$P\{V_n = m\} = C_n^m 0.01^m 0.99^{n-m} (m = 0, 1, 2, \cdots, n)$.

十二、【同试卷 Ⅳ 第十二题】

1995 年真题参考答案

(试卷 Ⅳ)

一、填空题

(1) $(-1)^n\dfrac{2(n!)}{(1+x)^{n+1}}$.　(2) $2z$.　(3) $x+e^x+C$,其中 C 为任意常数.

(4) $\begin{pmatrix}\frac{1}{10} & 0 & 0\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0\\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.　(5) $\dfrac{\overline{X}}{Q}\sqrt{n(n-1)}$.

二、选择题

(1) D.　(2) A.　(3) C.　(4) D.　(5) C.

三、$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续且可导,且 $f'(0)=0$.

四、$f(x)=3e^{3x}-2e^{2x}$.

五、$\ln(1-x-2x^2)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}-2^n}{n}x^n$,其收敛区间为 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

六、$I=-\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

七、$P_0=\dfrac{ab}{b-1}$,$Q_0=\dfrac{c}{1-b}$.

八、(1) 证明略.

$\left(\int_{-a}^{a}f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0}f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a}f(x)g(x)\mathrm{d}x,\int_{-a}^{0}f(x)g(x)\mathrm{d}x\xlongequal{x=-t}\int_{0}^{a}f(-x)g(x)\mathrm{d}x.\right)$

(2) $\dfrac{\pi}{2}$.

九、证明略.(由 $R(\mathrm{I})=R(\mathrm{II})=3$ 可得,存在 k_1,k_2,k_3,使得 $\boldsymbol{\alpha}_4=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$.)

十、(1) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}0 & 2 & -2\\ 2 & 4 & 4\\ -2 & 4 & -3\end{pmatrix}(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$.

(2) 令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt6}\\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt6}\\ -\frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵.

在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下,二次型 f 化为标准形 $f=y_1^2+6y_2^2-6y_3^2$.

十一、(1)$\alpha = 0.94^n$.　(2)$\beta = C_n^2 0.94^{n-2} 0.06^2$.　(3)$\theta = 1 - n \cdot 0.94^{n-1} \cdot 0.06 - 0.94^n$.

十二、$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ 或 } y < 0, \\ x^2 y^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y > 1, \\ y^2, & x > 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 1, & x > 1,\ y > 1. \end{cases}$

(试卷 Ⅴ)

一、填空题

(1)2.　(2)【同试卷 Ⅳ　第一、(2) 题】　(3)【同试卷 Ⅳ　第一、(3) 题】

(4)【同试卷 Ⅳ　第一、(4) 题】　(5) $\frac{1}{6}$.

二、选择题

(1)【同试卷 Ⅳ　第二、(1) 题】　(2)【同试卷 Ⅳ　第二、(2) 题】　(3) C.　(4) C.

(5)【同试卷 Ⅳ　第二、(5) 题】

三、【同试卷 Ⅳ　第三题】

四、$x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1 - x^2}\arcsin x - 2x + C$,其中 C 为任意常数.

五、【同试卷 Ⅳ　第八题】

六、【同试卷 Ⅳ　第七题】

七、证明略.(可考虑函数 $F(x) = xf(x)$,对 $F(x)$ 使用拉格朗日中值定理.)

八、$f(x,y)$ 在闭区域 D 上的极值为 $f(2,1) = 4$,最大值为 $f(2,1) = 4$,最小值为 $f(4,2) = -64$.

九、当 $\lambda \neq -2, 1$ 时,方程组有唯一解;当 $\lambda = -2$ 时,方程组无解;当 $\lambda = 1$ 时,方程组有无穷多解,其全部解为 $\boldsymbol{x} = k_1(-1,1,0)^{\mathrm{T}} + k_2(-1,0,1)^{\mathrm{T}} + (-2,0,0)^{\mathrm{T}}$,其中 k_1, k_2 为任意常数.

十、$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \end{pmatrix}$.

十一、【同试卷 Ⅳ　第十一题】

十二、证明略.(计算 Y 的分布函数 $G(Y)$.)

1996 年真题参考答案

(试卷 Ⅳ)

一、填空题

(1) $\dfrac{1}{x(1+\ln y)}\mathrm{d}x$. (2) $-\dfrac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+C$,其中 C 为任意常数. (3) $\dfrac{c}{a}\geqslant 0$,b 任意.

(4) $(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$. (5) $(4.412,5.588)$.

二、选择题

(1) D. (2) A. (3) C. (4) D. (5) B.

三、(1) $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{xg'(x)-g(x)+(x+1)\mathrm{e}^{-x}}{x^2}, & x\neq 0,\\ \dfrac{g''(0)-1}{2}, & x=0.\end{cases}$ (2) $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

四、0.

五、ln 2.

六、证明略.(可利用积分中值定理和罗尔定理.)

七、(1) 当 $0<p<\sqrt{\dfrac{b}{c}}(\sqrt{a}-\sqrt{bc})$ 时,随单价 p 增加,相应的销售额增加;当 $p>\sqrt{\dfrac{b}{c}}(\sqrt{a}-\sqrt{bc})$ 时,随单价 p 增加,相应的销售额减少.

(2) 当 $p=\sqrt{\dfrac{b}{c}}(\sqrt{a}-\sqrt{bc})$ 时,销售额取最大值,最大销售额是 $(\sqrt{a}-\sqrt{bc})^2$.

八、原方程的通解为 $y+\sqrt{x^2+y^2}=C(x>0)$,其中 C 为任意非零常数.当 $x<0$ 时,原方程的解与 $x>0$ 时相同.

九、(1) $y=2$. (2) $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-\dfrac{4}{5}\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $(\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AP})$ 为对角矩阵.

十、证明略.(可利用向量组线性无关的定义.)

十一、5.216 万元.

十二、$p=\dfrac{19}{36}$, $q=\dfrac{1}{18}$.

十三、证明略.(使用中心极限定理.) Z_n 近似服从参数为 $\mu=\alpha_2$, $\sigma^2=\dfrac{\alpha_4-\alpha_2^2}{n}$ 的正态分布.

(试卷 Ⅴ)

一、填空题

(1)【同试卷 Ⅳ　第一、(1) 题】 (2)【同试卷 Ⅳ　第一、(2) 题】 (3) $\frac{5}{32}$.

(4) $1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$.　(5) $\frac{11}{24}$.

二、选择题

(1) D.　(2) A.　(3)【同试卷 Ⅳ　第二、(3) 题】 (4)【同试卷 Ⅳ　第二、(4) 题】 (5) B.

三、【同试卷 Ⅳ　第三题】

四、$-2e^{-x^2y^2}$.

五、【同试卷 Ⅳ　第五题】

六、【同试卷 Ⅳ　第七题】

七、(1) 证明略.(利用定积分求面积.)

(2) 记抛物线与两坐标轴所围图形绕 x 轴旋转所得旋转体体积为 V_1,抛物线与 x 轴所围图形绕 x 轴旋转所得旋转体体积为 V_2,则$\frac{V_1}{V_2}=\frac{19}{8}$.

八、证明略.(可利用积分中值定理和罗尔定理.)

九、当 $t\neq-2$ 时,方程组无解;当 $t=-2$ 时,方程组有解,此时分两种情况:当 $p=-8$ 时,方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=k_1(4,-2,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,-2,0,1)^{\mathrm{T}}+(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$,其中 k_1, k_2 为任意常数;当 $p\neq-8$ 时,方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=k(-1,-2,0,1)^{\mathrm{T}}+(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$,其中 k 为任意常数.

十、$\frac{4}{3}$.

十一、【同试卷 Ⅳ　第十一题】

十二、$G(t)=\begin{cases}1-e^{-3\lambda t}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0.\end{cases}$ T 服从参数为 3λ 的指数分布.

1997 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $y=f(\ln x)e^{f(x)}$,其中 f 可微,则 $dy=$______.

(2) 若 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)dx$,则 $\int_0^1 f(x)dx=$______.

(3) 差分方程 $y_{t+1}-y_t=t2^t$ 的通解为______.

(4) 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 是正定的,则 t 的取值范围是______.

(5) 设随机变量 X 和 Y 相互独立且都服从正态分布 $N(0,3^2)$,而 $X_1,\cdots,X_9$ 和 $Y_1,\cdots,Y_9$ 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本,则统计量 $U=\dfrac{X_1+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+\cdots+Y_9^2}}$ 服从______分布(2 分),参数为______(1 分).

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设函数 $f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin(t^2)dt$, $g(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}$,则当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的(　　)

(A) 低阶无穷小.　　(B) 高阶无穷小.

(C) 等价无穷小.　　(D) 同阶但不等价的无穷小.

(2) 若函数 $f(-x)=f(x)(-\infty<x<+\infty)$,在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0$,且 $f''(x)<0$,则在 $(0,+\infty)$ 内有(　　)

(A) $f'(x)>0, f''(x)<0$.　　(B) $f'(x)>0, f''(x)>0$.

(C) $f'(x)<0, f''(x)<0$.　　(D) $f'(x)<0, f''(x)>0$.

(3) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,则下列向量组中,线性无关的是(　　)

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+22\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2-5\boldsymbol{\alpha}_3$.

(4) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵,则(　　)

(A) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

(B) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

(C) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$.

(D) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

(5) 设两个随机变量 X 与 Y 相互独立且同分布: $P\{X=-1\}=P\{Y=-1\}=\dfrac{1}{2}$, $P\{X=1\}=P\{Y=1\}=\dfrac{1}{2}$,则下列各式中成立的是(　　)

(A) $P\{X=Y\}=\dfrac{1}{2}$.　　(B) $P\{X=Y\}=1$.

(C) $P\{X+Y=0\}=\dfrac{1}{4}$.　　(D) $P\{XY=1\}=\dfrac{1}{4}$.

三、(本题满分 6 分)

在经济学中，称函数 $Q(x)=A[\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}]^{-\frac{1}{x}}$ 为固定替代弹性生产函数，而称函数 $\overline{Q}=AK^{\delta}L^{1-\delta}$ 为 Cobb-Douglas 生产函数(简称 C-D 生产函数).

试证明：当 $x\to 0$ 时，固定替代弹性生产函数变为 C-D 生产函数，即有 $\lim\limits_{x\to 0}Q(x)=\overline{Q}$.

四、(本题满分 5 分)

设 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数，$y=y(x)$ 和 $z=z(x)$ 分别由方程 $e^{xy}-y=0$ 和 $e^{z}-xz=0$ 所确定，求 $\dfrac{du}{dx}$.

五、(本题满分 6 分)

一商家销售某种商品的价格满足关系 $p=7-0.2x$(万元/吨)，x 为销售量(单位：吨)，商品的成本函数是 $C=3x+1$(万元).

(1) 若每销售一吨商品，政府要征税 t(万元)，求该商家获最大利润时的销售量；

(2) t 为何值时，政府税收总额最大.

六、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续、单调不减且 $f(0)\geqslant 0$. 试证函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x t^n f(t)\,dt, & x>0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $[0,+\infty)$ 上连续且单调不减(其中 $n>0$).

七、(本题满分 6 分)

从点 $P_1(1,0)$ 作 x 轴的垂线，交抛物线 $y=x^2$ 于点 $Q_1(1,1)$；再从 Q_1 作这条抛物线的切线与 x 轴交于 P_2. 然后又从 P_2 作 x 轴的垂线，交抛物线于点 Q_2，依次重复上述过程得到一系列的点 $P_1,Q_1;P_2,Q_2;\cdots;P_n,Q_n;\cdots$.

(1) 求 $\overline{OP_n}$；

(2) 求级数 $\overline{Q_1P_1}+\overline{Q_2P_2}+\cdots+\overline{Q_nP_n}+\cdots$ 的和，其中 $n(n\geqslant 1)$ 为自然数，而 $\overline{M_1M_2}$ 表示点 M_1 与 M_2 之间的距离.

八、(本题满分 6 分)

设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且满足方程

$$f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy,$$

求 $f(t)$.

九、(本题满分 6 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非奇异矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维列向量，b 为常数. 记分块矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{*} & |\boldsymbol{A}| \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & b \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}^{*}$ 是矩 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵.

(1) 计算并化简 $\boldsymbol{PQ}$；

(2) 证明：矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq b$.

十、(本题满分 10 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 1,2,3；矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1,2 的特征向量分别是 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-2,-1)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 3 的特征向量；

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

十一、(本题满分 7 分)

假设随机变量 X 的绝对值不大于 1，$P\{X=-1\}=\dfrac{1}{8}$，$P\{X=1\}=\dfrac{1}{4}$，在事件$\{-1<X<1\}$出现的条件下，X 在$(-1,1)$内的任一子区间上取值的条件概率与该子区间长度成正比. 试求 X 的分布函数.

十二、(本题满分 6 分)

游客乘电梯从底层到电视塔顶层观光；电梯于每个整点的第 5 分钟、25 分钟和 55 分钟从底层起行. 假设一游客在早晨八点的第 X 分钟到达底层候梯处，且 X 在$[0,60]$上均匀分布，求该游客等候时间的数学期望.

十三、(本题满分 6 分)

两台同样的自动记录仪，每台无故障工作的时间服从参数为 5 的指数分布. 首先开动其中一台，当其发生故障时停用而另一台自行开动. 试求两台记录仪无故障工作的总时间 T 的概率密度 $f(t)$，数学期望和方差.

1998 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设曲线 $f(x)=x^n$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n,0)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=$______.

(2) $\int\frac{\ln x-1}{x^2}\mathrm{d}x=$______.

(3) 差分方程 $2y_{t+1}+10y_t-5t=0$ 的通解为______.

(4) 设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{BA}-8\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则 $\boldsymbol{B}=$______.

(5) 设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自正态总体 $N(0,2^2)$ 的简单随机样本,$X=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$,其中 $a,b\neq0$.则当 $a=$______,$b=$______时,统计量 X 服从 χ^2 分布,其自由度为______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,周期为 4. 又 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的切线的斜率为(　　)

(A) $\frac{1}{2}$.　　(B) 0.　　(C) -1.　　(D) -2.

(2) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$,讨论函数 $f(x)$ 的间断点,其结论为(　　)

(A) 不存在间断点.　　(B) 存在间断点 $x=1$.

(C) 存在间断点 $x=0$.　　(D) 存在间断点 $x=-1$.

(3) 齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2x_3=0,\\x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$ 的系数矩阵记为 $\boldsymbol{A}$. 若存在 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$, 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则(　　)

(A) $\lambda=-2$ 且 $|\boldsymbol{B}|=0$.　　(B) $\lambda=-2$ 且 $|\boldsymbol{B}|\neq0$.

(C) $\lambda=1$ 且 $|\boldsymbol{B}|=0$.　　(D) $\lambda=1$ 且 $|\boldsymbol{B}|\neq0$.

(4) 设 $n(n\geqslant3)$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&a&\cdots&a\\a&1&a&\cdots&a\\a&a&1&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&1\end{pmatrix}$, 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n-1$,则 a 必为(　　)

(A) 1.　　(B) $\frac{1}{1-n}$.　　(C) -1.　　(D) $\frac{1}{n-1}$.

(5) 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 分别为随机变量 X_1 与 X_2 的分布函数. 为使 $F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$ 是某

一随机变量的分布函数,在下列给定的各组数值中应取(　　)

(A)$a=\frac{3}{5},b=-\frac{2}{5}$.　　(B)$a=\frac{2}{3},b=\frac{2}{3}$.

(C)$a=-\frac{1}{2},b=\frac{3}{2}$.　　(D)$a=\frac{1}{2},b=-\frac{3}{2}$.

三、(本题满分 5 分)

设 $z=(x^2+y^2)e^{-\arctan\frac{y}{x}}$,求 dz 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

四、(本题满分 5 分)

设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant x\}$,求 $\iint\limits_D \sqrt{x}\,dxdy$.

五、(本题满分 6 分)

设某酒厂有一批新酿的好酒,如果现在(假定 $t=0$)就售出,总收入为 R_0(元). 如果窖藏起来待来日按陈酒价格出售,t 年末总收入为 $R=R_0e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}}$.假定银行的年利率为 r,并以连续复利计息,试求窖藏多少年售出可使总收入的现值最大. 并求 $r=0.06$ 时的 t 值.

六、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且 $f'(x)\neq 0$. 试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$,使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}\cdot e^{-\eta}.$$

七、(本题满分 6 分)

设有两条抛物线 $y=nx^2+\frac{1}{n}$ 和 $y=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$,记它们交点的横坐标的绝对值为 a_n.

(1) 求这两条抛物线所围成的平面图形的面积 S_n;

(2) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}$ 的和.

八、(本题满分 7 分)

设函数 $f(x)$ 在$[1,+\infty)$上连续.若由曲线 $y=f(x)$,直线 $x=1$, $x=t(t>1)$ 与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体体积为 $V(t)=\frac{\pi}{3}[t^2f(t)-f(1)]$.试求 $y=f(x)$ 所满足的微分方程,并求该微分方程满足条件 $y\Big|_{x=2}=\frac{2}{9}$ 的解.

九、(本题满分 9 分)

设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 都是非零向量,且满足条件 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=0$. 记 n 阶矩阵

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$. 求:

(1) $\boldsymbol{A}^2$;

(2) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量.

十、(本题满分 7 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,矩阵 $\boldsymbol{B}=(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2$,其中 k 为实数, $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵. 求对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,使 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似,并求 k 为何值时,$\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

十一、(本题满分 10 分)

一商店经销某种商品,每周进货的数量 X 与顾客对该种商品的需求量 Y 是相互独立的随机变量,且都服从区间[10,20]上的均匀分布. 商店每售出一单位商品可得利润 1 000 元;若需求量超过了进货量,商店可从其他商店调剂供应,这时每单位商品获利润为 500 元. 试计算此商店经销该种商品每周所得利润的期望值.

十二、(本题满分 9 分)

设有来自三个地区的各 10 名,15 名和 25 名考生的报名表,其中女生的报名表分别为 3 份,7 份和 5 份. 随机地取一个地区的报名表,从中先后抽出两份.

(1) 求先抽到的一份是女生表的概率 p;

(2) 已知后抽到的一份是男生表,求先抽到的一份是女生表的概率 q.

1999 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $f(x)$ 有一个原函数 $\frac{\sin x}{x}$,则 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf'(x)\,\mathrm{d}x =$ ______.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} =$ ______.

(3) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,而 $n \geqslant 2$ 为正整数,则 $\boldsymbol{A}^n - 2\boldsymbol{A}^{n-1} =$ ______.

(4) 在天平上重复称量一重为 a 的物品,假设各次称量结果相互独立且同服从正态分布 $N(a,0.2^2)$.若以 $\overline{X}_n$ 表示 n 次称量结果的算术平均值,则为使 $P\{|\overline{X}_n - a| < 0.1\} \geqslant 0.95$, n 的最小值应不小于自然数______.

(5) 设随机变量 $X_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n;n\geqslant 2)$ 独立同分布,$E(X_{ij})=2$,则行列式

$$Y=\begin{vmatrix}X_{11}&X_{12}&\cdots&X_{1n}\\X_{21}&X_{22}&\cdots&X_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\X_{n1}&X_{n2}&\cdots&X_{nn}\end{vmatrix}$$

的数学期望 $E(Y)=$ ______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $f(x)$ 是连续函数,$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则(　　)

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时,$F(x)$ 必为偶函数.

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时,$F(x)$ 必为奇函数.

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时,$F(x)$ 必为周期函数.

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时,$F(x)$ 必为单调增函数.

(2) 设 $f(x,y)$ 连续,且 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$,其中 D 是由 $y=0,y=x^2,x=1$ 所围区域,则 $f(x,y)$ 等于(　　)

(A) xy.　　(B) $2xy$.　　(C) $xy+\frac{1}{8}$.　　(D) $xy+1$.

(3) 设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示,但不能由向量组(Ⅰ):$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示,记向量组(Ⅱ):$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}$,则(　　)

(A) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由(Ⅰ)线性表示,也不能由(Ⅱ)线性表示.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由(Ⅰ)线性表示,但可由(Ⅱ)线性表示.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由(Ⅰ)线性表示,也可由(Ⅱ)线性表示.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由(Ⅰ)线性表示,但不可由(Ⅱ)线性表示.

(4) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,则(　　)

(A) $\lambda E - A = \lambda E - B$.

(B) A 与 B 有相同的特征值和特征向量.

(C) A 与 B 都相似于一个对角矩阵.

(D) 对任意常数 t, $tE - A$ 与 $tE - B$ 相似.

(5) 设随机变量 $X_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ $(i=1,2)$,且满足 $P\{X_1X_2=0\}=1$,则 $P\{X_1=X_2\}$ 等于(　　)

(A) 0.　　(B) $\frac{1}{4}$.　　(C) $\frac{1}{2}$.　　(D) 1.

三、(本题满分 6 分)

曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的切线与 x 轴和 y 轴围成一个图形,记切点的横坐标为 a. 试求切线方程和这个图形的面积. 当切点沿曲线趋于无穷远时,该面积的变化趋势如何?

四、(本题满分 7 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由直线 $x=-2$, $y=0$, $y=2$ 以及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面区域.

五、(本题满分 6 分)

设生产某种产品必须投入两种要素,x_1 和 x_2 分别为两要素的投入量,Q 为产出量;若生产函数为 $Q=2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$,其中 α,β 为正常数,且 $\alpha+\beta=1$. 假设两种要素的价格分别为 p_1 和 p_2,试问:当产出量为 12 时,两要素各投入多少可以使得投入总费用最小?

六、(本题满分 6 分)

设有微分方程 $y'-2y=\varphi(x)$,其中 $\varphi(x)=\begin{cases} 2, & x<1, \\ 0, & x>1. \end{cases}$ 试求在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数 $y=y(x)$,使之在 $(-\infty,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 内都满足所给方程,且满足条件 $y(0)=0$.

七、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 连续,且 $\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\arctan x^2$. 已知 $f(1)=1$,求 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ 的值.

八、(本题满分 7 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=f(1)=0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$. 试证:

(1) 存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,使 $f(\eta)=\eta$;

(2) 对任意实数 λ,必存在 $\xi\in(0,\eta)$,使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

九、(本题满分 9 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$，且 $|\boldsymbol{A}|=-1$. 又设 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 有特征值 λ_0，属于 λ_0 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，求 a,b,c 及 λ_0 的值.

十、(本题满分 7 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，已知矩阵 $\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$，试证：当 $\lambda>0$ 时，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

十一、(本题满分 9 分)

假设二维随机变量 (X,Y) 在矩形 $G=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上服从均匀分布. 记

$$U=\begin{cases}0, & X\leqslant Y,\\ 1, & X>Y,\end{cases}\qquad V=\begin{cases}0, & X\leqslant 2Y,\\ 1, & X>2Y.\end{cases}$$

(1) 求 U 和 V 的联 分布；

(2) 求 U 和 V 的相关系数 r.

十二、(本题满分 7 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 是来自正态总体 X 的简单随机样本，$Y_1=\dfrac{1}{6}(X_1+\cdots+X_6)$，$Y_2=\dfrac{1}{3}(X_7+X_8+X_9)$，$S^2=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2$，$Z=\dfrac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}$，证明统计量 Z 服从自由度为 2 的 t 分布.

2000 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$,其中 f,g 均可微,则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$______.

(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}=$______.

(3) 若 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{5}$,则行列式 $|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}|=$______.

(4) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & x\in[0,1],\\ \dfrac{2}{9}, & x\in[3,6],\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

若 k 使得 $P\{X\geqslant k\}=\dfrac{2}{3}$,则 k 的取值范围是______.

(5) 设随机变量 X 在区间 $[-1,2]$ 上服从均匀分布,随机变量 $Y=\begin{cases}1, & X>0,\\ 0, & X=0,\\ -1, & X<0,\end{cases}$ 则方差 $D(Y)=$______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设对任意的 x,总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$(　　)

(A) 存在且等于零.　　(B) 存在但不一定为零.

(C) 一定不存在.　　(D) 不一定存在.

(2) 设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导,则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是(　　)

(A) $f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$.　　(B) $f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq 0$.

(C) $f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$.　　(D) $f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$.

(3) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的三个解向量,且 $r(\boldsymbol{A})=3$,$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,2,3)^{\mathrm{T}}$,$C$ 表示任意常数,则线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解为(　　)

(A) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，则对于线性方程组(Ⅰ)：$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 和(Ⅱ)$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$，必有(　　)

(A)(Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解，(Ⅰ)的解也是(Ⅱ)的解.

(B)(Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解，但(Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解.

(C)(Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解，(Ⅱ)的解也不是(Ⅰ)的解.

(D)(Ⅰ)的解是(Ⅱ)的解，但(Ⅱ)的解不是(Ⅰ)的解.

(5) 在电炉上安装了 4 个温控器，其显示温度的误差是随机的. 在使用过程中，只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0，电炉就断电. 以 E 表示事件“电炉断电”，而 $T_{(1)}\leqslant T_{(2)}\leqslant T_{(3)}\leqslant T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值，则事件 E 等于(　　)

(A) $\{T_{(1)}\geqslant t_0\}$.　　(B) $\{T_{(2)}\geqslant t_0\}$.　　(C) $\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$.　　(D) $\{T_{(4)}\geqslant t_0\}$.

三、(本题满分 6 分)

求微分方程 $y''-2y'-\mathrm{e}^{2x}=0$ 满足条件 $y(0)=1, y'(0)=1$ 的解.

四、(本题满分 6 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由曲线 $y=-a+\sqrt{a^2-x^2}\ (a>0)$ 和直线 $y=-x$ 围成的区域.

五、(本题满分 6 分)

假设某企业在两个相互分割的市场上出售同一种产品，两个市场的需求函数分别是 $p_1=18-2Q_1$，$p_2=12-Q_2$，其中 p_1 和 p_2 分别表示该产品在两个市场的价格(单位：万元/吨)，Q_1 和 Q_2 分别表示该产品在两个市场的销售量(即需求量，单位：吨)，并且该企业生产这种产品的总成本函数是 $C=2Q+5$，其中 Q 表示该产品在两个市场的销售总量，即 $Q=Q_1+Q_2$.

(1) 如果该企业实行价格差别策略，试确定两个市场上该产品的销售量和价格，使该企业获得最大利润；

(2) 如果该企业实行价格无差别策略，试确定两个市场上该产品的销售量及其统一的价格，使该企业的总利润最大化；并比较两种价格策略下的总利润大小.

六、(本题满分 7 分)

求函数 $y=(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的单调区间和极值，并求该函数图形的渐近线.

七、(本题满分 6 分)

设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos x\mathrm{d}x, n=0,1,2,\cdots$，求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_n$.

八、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0, \int_0^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$.

试证明:在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点ξ_1,ξ_2,使$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

九、(本题满分 8 分)

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(a,2,10)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,1,5)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}=(1,b,c)^{\mathrm{T}}$. 试问:当$a,b,c$满足什么条件时,

(1)$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示,且表示唯一?

(2)$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示?

(3)$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示,但表示不唯一? 并求出一般表达式.

十、(本题满分 9 分)

设有n元实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2,$$

其中$a_i(i=1,2,\cdots,n)$为实数. 试问:当$a_1,a_2,\cdots,a_n$满足何种条件时,二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为正定二次型.

十一、(本题满分 8 分)

(超纲题) 假设 0.50,1.25,0.80,2.00 是来自总体X的简单随机样本值. 已知$Y=\ln X$服从正态分布$N(\mu,1)$.

(1) 求X的数学期望$E(X)$(记$E(X)$为b);

(2) 求μ的置信度为 0.95 的置信区间;

(3) 利用上述结果求b的置信度为 0.95 的置信区间.

十二、(本题满分 8 分)

设A,B是两个随机事件,随机变量

$$X=\begin{cases}1, & A\text{ 出现},\\ -1, & A\text{ 不出现},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{ 出现},\\ -1, & B\text{ 不出现}.\end{cases}$$

试证明随机变量X和Y不相关的充分必要条件是A与B相互独立.

2001 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

（1）设生产函数为 $Q=AL^{\alpha}K^{\beta}$，其中 Q 是产出量，L 是劳动投入量，K 是资本投入量，而 A,α,β 均为大于零的参数，则当 $Q=1$ 时 K 关于 L 的弹性为______.

（2）某公司每年的工资总额在比上一年增加 20% 的基础上再追加 2 百万元. 若以 W_t 表示第 t 年的工资总额（单位：百万元），则 W_t 满足的差分方程是______.

（3）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$，且 $r(\boldsymbol{A})=3$，则 $k=$______.

（4）设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为 -2 和 2，方差分别为 1 和 4，而相关系数为 -0.5，则根据切比雪夫不等式 $P\{|X+Y|\geqslant 6\}\leqslant$______.

（5）设总体 X 服从正态分布 $N(0,2^2)$，而 $X_1,X_2,\cdots,X_{15}$ 是来自总体 X 的简单随机样本，则随机变量

$$Y=\frac{X_1^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2)}$$

服从______分布，参数为______.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

（1）设 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续，又 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$，则（　　）

（A）$x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

（B）$x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

（C）$(a,f(a))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（D）$x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(a,f(a))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（2）设 $g(x)=\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$，其中 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}(x^2+1), & 0\leqslant x<1, \\ \dfrac{1}{3}(x-1), & 1\leqslant x\leqslant 2, \end{cases}$ 则 $g(x)$ 在区间 $(0,2)$ 内（　　）

（A）无界.　　（B）递减.　　（C）不连续.　　（D）连续.

（3）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 等于（　　）

(A) $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$.　　(B) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_2$.

(C) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}$.　　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1$.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维列向量. 若 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A})$,则线性方　　(　　)

(A) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\alpha}$ 必有无穷多解.　　(B) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\alpha}$ 必有唯一解.

(C) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}\\ y\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解.　　(D) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}\\ y\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解.

(5) 将一枚硬币重复掷 n 次,以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数,则 X 和 Y 的相关系数等于(　　)

(A) -1.　　(B) 0.　　(C) $\frac{1}{2}$.　　(D) 1.

三、(本题满分 5 分)

设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数,又函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 分别由下列两式确定:

$$\mathrm{e}^{xy}-xy=2 \quad 和 \quad \mathrm{e}^{x}=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t,$$

求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

四、(本题满分 6 分)

已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,且

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=\mathrm{e},\qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)],$$

求 c 的值.

五、(本题满分 6 分)

求二重积分 $\iint\limits_D y[1+x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值,其中 D 是由直线 $y=x,y=-1$ 及 $x=1$ 围成的平面区域.

六、(本题满分 7 分)

已知抛物线 $y=px^2+qx$(其中 $p<0,q>0$) 在第一象限内与直线 $x+y=5$ 相切,且此抛物线与 x 轴所围成的平面图形的面积为 S.

(1) 问 p 和 q 为何值时,S 达到最大值?

(2) 求出此最大值.

七、(本题满分 6 分)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且满足

$$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}x\mathrm{e}^{1-x}f(x)\mathrm{d}x\quad(k>1),$$

证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$,使得 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

八、(本题满分 7 分)

已知 $f_n(x)$ 满足

$$f'_n(x)=f_n(x)+x^{n-1}\mathrm{e}^x \quad (n\text{ 为正整数}),$$

且 $f_n(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{n}$,求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 之和.

九、(本题满分 9 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有解但不唯一,试求

(1) a 的值;

(2) 正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}$ 为对角矩阵.

十、(本题满分 8 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, $r(\boldsymbol{A})=n$, A_{ij} 是 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式($i,j=1,2,\cdots,n$),二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|\boldsymbol{A}|}x_ix_j.$$

(1) 记 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,把 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 写成矩阵形式,并证明二次型 $f(\boldsymbol{X})$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$;

(2) 二次型 $g(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 与 $f(\boldsymbol{X})$ 的规范形是否相同? 说明理由.

十一、(本题满分 8 分)

一生产线生产的产品成箱包装,每箱的重量是随机的. 假设每箱平均重 50 千克,标准差为 5 千克. 若用最大载重量为 5 吨的汽车承运,试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱,才能保障不超载的概率大于 0.977. ($\Phi(2)=0.977$,其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数.)

十二、(本题满分 8 分)

设随机变量 X 和 Y 的联合分布是正方形 $G=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 3,1\leqslant y\leqslant 3\}$ 上的均匀分布,试求随机变量 $U=|X-Y|$ 的概率密度 $p(u)$.

2002 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设常数 $a \neq \frac{1}{2}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n =$ ______.

(2) 交换积分次序:$\int_0^{\frac{1}{4}} \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}y \int_y^{\frac{1}{2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x =$ ______.

(3) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,3 维列向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a,1,1)^{\mathrm{T}}$. 已知 $\boldsymbol{A\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关,则 $a =$ ______.

(4) 设随机变量 X 和 Y 的联合概率分布为

X \ 概率 \ Y	-1	0	1
0	0.07	0.18	0.15
1	0.08	0.32	0.20

则 X^2 和 Y^2 的协方差 $\mathrm{Cov}(X^2,Y^2) =$ ______.

(5) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-(x-\theta)}, & x \geqslant \theta, \\ 0, & x < \theta, \end{cases}$$

而 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本,则未知参数 θ 的矩估计量为______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义,在开区间 (a,b) 内可导,则(　　)

(A) 当 $f(a)f(b) < 0$ 时,存在 $\xi \in (a,b)$,使 $f(\xi) = 0$.

(B) 对任何 $\xi \in (a,b)$,有 $\lim\limits_{x\to\xi}[f(x) - f(\xi)] = 0$.

(C) 当 $f(a) = f(b)$ 时,存在 $\xi \in (a,b)$,使 $f'(\xi) = 0$.

(D) 存在 $\xi \in (a,b)$,使 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$.

(2) (原考题有误,见参考答案说明及修正) 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 与 $\frac{1}{3}$,则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{b_n^2} x^n$ 的收敛半径为(　　)

(A) 5.　　(B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$.　　(C) $\frac{1}{3}$.　　(D) $\frac{1}{5}$.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n \times m$ 矩阵,则线性方程组 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$(　　)

(A) 当 $n > m$ 时仅有零解.　　(B) 当 $n > m$ 时必有非零解.

(C) 当 $m > n$ 时仅有零解.　　(D) 当 $m > n$ 时必有非零解.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{P}$ 是 n 阶可逆矩阵. 已知 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量,则矩阵 $(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}$ 属于特征值 λ 的特征向量是(　　)

(A) $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$.　　(B) $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.　　(C) $\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}$.　　(D) $(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

(5) 设随机变量 X 和 Y 都服从标准正态分布,则(　　)

(A) $X+Y$ 服从正态分布.　　(B) X^2+Y^2 服从 χ^2 分布.

(C) X^2 和 Y^2 都服从 χ^2 分布.　　(D) $\dfrac{X^2}{Y^2}$ 服从 F 分布.

三、(本题满分 5 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}$.

四、(本题满分 7 分)

设函数 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数,且 $z=z(x,y)$ 由方程 $x\mathrm{e}^x-y\mathrm{e}^y=z\mathrm{e}^z$ 所确定,求 $\mathrm{d}u$.

五、(本题满分 6 分)

设 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$,求 $\int\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\,\mathrm{d}x$.

六、(本题满分 7 分)

设 D_1 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a,x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面区域;D_2 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $y=0,x=a$ 所围成的平面区域,其中 $0<a<2$.

(1) 试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1;D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2;

(2) 问当 a 为何值时,V_1+V_2 取得最大值? 试求此最大值.

七、(本题满分 7 分)

(1) 验证函数 $y(x)=1+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^6}{6!}+\dfrac{x^9}{9!}+\cdots+\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$ 满足微分方程 $y''+y'+y=\mathrm{e}^x$;

(2) 利用(1) 的结果求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

八、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $g(x)>0$. 利用闭区间上连续函数的性质,证明存在一点 $\xi\in[a,b]$,使 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

九、(本题满分 8 分)

设齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0, \\ bx_1 + ax_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0, \\ \cdots\cdots \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + ax_n = 0, \end{cases}$$

其中 $a \neq 0, b \neq 0, n \geqslant 2$. 试讨论 a, b 为何值时,方程组仅有零解、有无穷多组解？在有无穷多组解时,求出全部解,并用基础解系表示全部解.

十、(本题满分 8 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵,且满足条件 $\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$,已知 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A}) = 2$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值;

(2) 当 k 为何值时,矩阵 $\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

十一、(本题满分 8 分)

假设随机变量 U 在区间$[-2,2]$上服从均匀分布,随机变量

$$X = \begin{cases} -1, & U \leqslant -1, \\ 1, & U > -1, \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} -1, & U \leqslant 1, \\ 1, & U > 1. \end{cases}$$

试求(1) X 和 Y 的联合概率分布;(2) $D(X+Y)$.

十二、(本题满分 8 分)

假设一设备开机后无故障工作的时间 X 服从指数分布,平均无故障工作的时间 $E(X)$ 为 5 小时. 设备定时开机,出现故障时自动关机,而在无故障的情况下工作 2 小时便关机. 试求该设备每次开机无故障工作的时间 Y 的分布函数 $F(y)$.

2003 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}x^{\lambda}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 其导函数在 $x=0$ 处连续,则 λ 的取值范围是______.

(2) 已知曲线 $y=x^3-3a^2x+b$ 与 x 轴相切,则 b^2 可以通过 a 表示为 $b^2=$______.

(3) 设 $a>0$, $f(x)=g(x)=\begin{cases}a, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 而 D 表示全平面,则 $I=\iint\limits_D f(x)g(y-x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$______.

(4) 设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,0,\cdots,0,a)^{\mathrm{T}}$, $a<0$; $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\dfrac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$,

其中 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{B}$,则 $a=$______.

(5) 设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.9,若 $Z=X-0.4$,则 Y 与 Z 的相关系数为______.

(6) 设总体 X 服从参数为 2 的指数分布,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,则当 $n\to\infty$

时,$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于______.

二、选择题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

(1) 设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数,且 $f'(0)$ 存在,则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$(　　)

(A) 在 $x=0$ 处左极限不存在.　　(B) 有跳跃间断点 $x=0$.

(C) 在 $x=0$ 处右极限不存在.　　(D) 有可去间断点 $x=0$.

(2) 设可微函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极小值,则下列结论正确的是(　　)

(A) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数等于零.

(B) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数大于零.

(C) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数小于零.

(D) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数不存在.

(3) 设 $p_n=\dfrac{a_n+|a_n|}{2}$, $q_n=\dfrac{a_n-|a_n|}{2}$, $n=1,2,\cdots$,则下列命题正确的是(　　)

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛.

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛.

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 的敛散性都不定.

(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 的敛散性都不定.

(4) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{pmatrix}$,若 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵的秩等于 1,则必有(　　)

(A) $a = b$ 或 $a + 2b = 0$. (B) $a = b$ 或 $a + 2b \neq 0$.

(C) $a \neq b$ 且 $a + 2b = 0$. (D) $a \neq b$ 且 $a + 2b \neq 0$.

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维向量,下列结论不正确的是( )

(A) 若对于任意一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$,都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s \neq \mathbf{0}$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

(B) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,则对于任意一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$,有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充分必要条件是此向量组的秩为 s.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的必要条件是其中任意两个向量线性无关.

(6) 将一枚硬币独立地掷两次,引进事件: $A_1 = \{$掷第一次出现正面$\}$, $A_2 = \{$掷第二次出现正面$\}$, $A_3 = \{$正、反面各出现一次$\}$, $A_4 = \{$正面出现两次$\}$,则事件( )

(A) A_1, A_2, A_3 相互独立. (B) A_2, A_3, A_4 相互独立.

(C) A_1, A_2, A_3 两两独立. (D) A_2, A_3, A_4 两两独立.

三、(本题满分 8 分)

设 $f(x) = \dfrac{1}{\pi x} + \dfrac{1}{\sin \pi x} - \dfrac{1}{\pi(1-x)}, x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right)$,试补充定义 $f(1)$ 使得 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ 上连续.

四、(本题满分 8 分)

设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数,且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 1$,又 $g(x,y) = f\left[xy, \dfrac{1}{2}(x^2 - y^2)\right]$,求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

五、(本题满分 8 分)

计算二重积分 $I = \iint\limits_D e^{-(x^2+y^2-\pi)} \sin(x^2 + y^2)\, dxdy$,其中积分区域 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant \pi\}$.

六、(本题满分 9 分)

求幂级数 $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{2n} (|x| < 1)$ 的和函数 $f(x)$ 及其极值.

七、(本题满分 9 分)

设 $F(x) = f(x)g(x)$,其中 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足以下条件:

$$f'(x) = g(x),\ g'(x) = f(x) \text{ 且 } f(0) = 0,\ f(x) + g(x) = 2e^x.$$

(1) 求 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程;

(2) 求出 $F(x)$ 的表达式.

八、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续,在 $(0,3)$ 内可导,且 $f(0) + f(1) + f(2) = 3$, $f(3) = 1$. 试证必存在 $\xi \in (0,3)$,使 $f'(\xi) = 0$.

九、(本题满分 13 分)

已知齐次线性方程组

$$\begin{cases}(a_1+b)x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+a_2x_2+(a_3+b)x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ \qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+(a_n+b)x_n=0,\end{cases}$$

其中 $\sum_{i=1}^{n}a_i\neq 0$，试讨论 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 b 满足何种关系时，

(1) 方程组仅有零解；

(2) 方程组有非零解，在有非零解时，求此方程组的一个基础解系.

十、(本题满分 13 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b>0)$，其中二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为 1，特征值之积为 -12.

(1) 求 a,b 之值；

(2) 利用正交变换将二次型化为标准形，并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.

十一、(本题满分 13 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & x\in[1,8],\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$F(x)$ 是 X 的分布函数.求随机变量 $Y=F(X)$ 的分布函数.

十二、(本题满分 13 分)

设随机变量 X 与 Y 独立，其中 X 的概率分布为

$$X\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix},$$

而 Y 的概率密度为 $f(y)$，求随机变量 $U=X+Y$ 的概率密度 $g(u)$.

2004年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分)

(1) 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$,则 $a=$______,$b=$______.

(2) 函数$f(u,v)$由关系式$f[xg(y),y]=x+g(y)$确定,其中函数$g(y)$可微,且$g(y)\neq 0$,则$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=$______.

(3) 设$f(x)=\begin{cases}xe^{x^2}, & -\dfrac{1}{2}\leqslant x<\dfrac{1}{2},\\ -1, & x\geqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 则$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x-1)\,dx=$______.

(4) 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$的秩为______.

(5) 设随机变量X服从参数为λ的指数分布,则$P\{X>\sqrt{D(X)}\}=$______.

(6) 设总体X服从正态分布$N(\mu_1,\sigma^2)$,总体Y服从正态分布$N(\mu_2,\sigma^2)$,$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$和$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$分别是来自总体X和Y的简单随机样本,则

$$E\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2+\sum\limits_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2}{n_1+n_2-2}\right]=\underline{\qquad}.$$

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分)

(7) 函数$f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$在下列哪个区间内有界(　　)

(A)$(-1,0)$.　(B)$(0,1)$.　(C)$(1,2)$.　(D)$(2,3)$.

(8) 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$,$g(x)=\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则(　　)

(A)$x=0$必是$g(x)$的第一类间断点.　(B)$x=0$必是$g(x)$的第二类间断点.

(C)$x=0$必是$g(x)$的连续点.　(D)$g(x)$在点$x=0$处的连续性与a的取值有关.

(9) 设$f(x)=|x(1-x)|$,则(　　)

(A)$x=0$是$f(x)$的极值点,但$(0,0)$不是曲线$y=f(x)$的拐点.

(B)$x=0$不是$f(x)$的极值点,但$(0,0)$是曲线$y=f(x)$的拐点.

(C)$x=0$是$f(x)$的极值点,且$(0,0)$是曲线$y=f(x)$的拐点.

(D)$x=0$不是$f(x)$的极值点,$(0,0)$也不是曲线$y=f(x)$的拐点.

(10) 设有以下命题:

① 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛;

② 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+100}$收敛;

③ 若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散；

④ 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都收敛.

则以上命题中正确的是(　　)

(A)①②.　　(B)②③.　　(C)③④.　　(D)①④.

(11) 设$f'(x)$在$[a,b]$上连续，且$f'(a)>0$，$f'(b)<0$，则下列结论中错误的是(　　)

(A) 至少存在一点$x_0\in(a,b)$，使得$f(x_0)>f(a)$.

(B) 至少存在一点$x_0\in(a,b)$，使得$f(x_0)>f(b)$.

(C) 至少存在一点$x_0\in(a,b)$，使得$f'(x_0)=0$.

(D) 至少存在一点$x_0\in(a,b)$，使得$f(x_0)=0$.

(12) 设n阶矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$等价，则必有(　　)

(A) 当$|\boldsymbol{A}|=a(a\neq0)$时，$|\boldsymbol{B}|=a$.　　(B) 当$|\boldsymbol{A}|=a(a\neq0)$时，$|\boldsymbol{B}|=-a$.

(C) 当$|\boldsymbol{A}|\neq0$时，$|\boldsymbol{B}|=0$.　　(D) 当$|\boldsymbol{A}|=0$时，$|\boldsymbol{B}|=0$.

(13) 设n阶矩阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$，若$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_4$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的互不相等的解，则对应的齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系(　　)

(A) 不存在.　　(B) 仅含一个非零解向量.

(C) 含有两个线性无关的解向量.　　(D) 含有三个线性无关的解向量.

(14) 设随机变量X服从正态分布$N(0,1)$，对给定的$\alpha(0<\alpha<1)$，数u_α满足$P\{X>u_\alpha\}=\alpha$.若$P\{|X|<x\}=\alpha$，则x等于(　　)

(A)$u_{\frac{\alpha}{2}}$.　　(B)$u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.　　(C)$u_{\frac{1-\alpha}{2}}$.　　(D)$u_{1-\alpha}$.

三、解答题(本题共 9 小题，满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15) (本题满分 8 分)

求$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2x}-\dfrac{\cos^2x}{x^2}\right)$.

(16) (本题满分 8 分)

求$\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma$，其中$D$是由圆$x^2+y^2=4$和$(x+1)^2+y^2=1$所围成的平面区域.

(17) (本题满分 8 分)

设$f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上连续，且满足

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b),\quad \int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b g(t)\mathrm{d}t,$$

证明：$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b xg(x)\mathrm{d}x$.

(18) (本题满分 9 分)

设某商品的需求函数为$Q=100-5P$，其中价格$P\in(0,20)$，Q为需求量.

(Ⅰ) 求需求量对价格的弹性$E_d(E_d>0)$；

(Ⅱ) 推导$\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=Q(1-E_d)$(其中$R$为收益)，并用弹性$E_d$说明价格在何范围内变化时，降低价格反而使收益增加.

(19)(本题满分 9 分)

设级数

$$\frac{x^4}{2\times4}+\frac{x^6}{2\times4\times6}+\frac{x^8}{2\times4\times6\times8}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$$

的和函数为 $S(x)$. 求:

(Ⅰ) $S(x)$ 所满足的一阶微分方程;

(Ⅱ) $S(x)$ 的表达式.

(20)(本题满分 13 分)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0)^{\mathrm T}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a+2,-3a)^{\mathrm T}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-b-2,a+2b)^{\mathrm T}$, $\boldsymbol{\beta}=(1,3,-3)^{\mathrm T}$, 试讨论当 a,b 为何值时,

(Ⅰ) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示;

(Ⅱ) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一地线性表示,并求出表示式;

(Ⅲ) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,但表示式不唯一,并求出表示式.

(21)(本题满分 13 分)

设 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&b&\cdots&b\\b&1&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(Ⅱ) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

(22)(本题满分 13 分)

设 A,B 为两个随机事件,且 $P(A)=\dfrac{1}{4}$,$P(B|A)=\dfrac{1}{3}$,$P(A|B)=\dfrac{1}{2}$,令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{ 发生},\\0, & A\text{ 不发生},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{ 发生},\\0, & B\text{ 不发生}.\end{cases}$$

求:(Ⅰ) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布;

(Ⅱ) X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY};

(Ⅲ) $Z=X^2+Y^2$ 的概率分布.

(23)(本题满分 13 分)

设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{\alpha}{x}\right)^{\beta}, & x>\alpha,\\[2mm] 0, & x\leqslant\alpha,\end{cases}$$

其中参数 $\alpha>0$, $\beta>1$. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,

(Ⅰ) 当 $\alpha=1$ 时,求未知参数 β 的矩估计量;

(Ⅱ) 当 $\alpha=1$ 时,求未知参数 β 的最大似然估计量;

(Ⅲ) 当 $\beta=2$ 时,求未知参数 α 的最大似然估计量.

2005 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$ ______.

(2) 微分方程 $xy'+y=0$ 满足初始条件 $y(1)=2$ 的特解为______.

(3) 设二元函数 $z=xe^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$,则 $dz\big|_{(1,0)}=$ ______.

(4) 设行向量组 $(2,1,1,1),(2,1,a,a),(3,2,1,a),(4,3,2,1)$ 线性相关,且 $a\neq 1$,则 $a=$ ______.

(5) 从数 1,2,3,4 中任取一个数,记为 X,再从 $1,\cdots,X$ 中任取一个数,记为 Y,则 $P\{Y=2\}=$ ______.

(6) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

若随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立,则 $a=$ ______,$b=$ ______.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分)

(7) 当 a 取下列哪个值时,函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$ 恰有两个不同的零点.(　　)

(A) 2.　　(B) 4.　　(C) 6.　　(D) 8.

(8) 设 $I_1=\iint\limits_D\cos\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$,$I_2=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)\,d\sigma$,$I_3=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)^2\,d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,则(　　)

(A) $I_3>I_2>I_1$.　　(B) $I_1>I_2>I_3$.　　(C) $I_2>I_1>I_3$.　　(D) $I_3>I_1>I_2$.

(9) 设 $a_n>0$,$n=1,2,\cdots$,若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛,则下列结论正确的是(　　)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 发散.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 发散.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛.　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$ 收敛.

(10) 设 $f(x)=x\sin x+\cos x$,下列命题中正确的是(　　)

(A) $f(0)$ 是极大值,$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是极小值.

(B) $f(0)$ 是极小值,$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是极大值.

(C) $f(0)$ 是极大值,$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 也是极大值.

(D) $f(0)$ 是极小值,$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 也是极小值.

(11) 以下四个命题中,正确的是(　　)

(A) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续,则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(B) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续,则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(C) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界,则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(D) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界,则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(12) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵. 若 a_{11},a_{12},a_{13} 为三个相等的正数,则 a_{11} 为(　　)

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.　　(B) 3.　　(C) $\dfrac{1}{3}$.　　(D) $\sqrt{3}$.

(13) 设 λ_1,λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值,对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性无关的充分必要条件是(　　)

(A) $\lambda_1=0$.　　(B) $\lambda_2=0$.　　(C) $\lambda_1\neq0$.　　(D) $\lambda_2\neq0$.

(14) (超纲题) 设一批零件的长度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,其中 μ,σ^2 均未知.现从中随机抽取 16 个零件,测得样本均值 $\bar{x}=20(\mathrm{cm})$,样本标准差 $S=1(\mathrm{cm})$,则 μ 的置信度为 0.90 的置信区间是(　　)

(A) $\left(20-\dfrac{1}{4}t_{0.05}(16),20+\dfrac{1}{4}t_{0.05}(16)\right)$.

(B) $\left(20-\dfrac{1}{4}t_{0.1}(16),20+\dfrac{1}{4}t_{0.1}(16)\right)$.

(C) $\left(20-\dfrac{1}{4}t_{0.05}(15),20+\dfrac{1}{4}t_{0.05}(15)\right)$.

(D) $\left(20-\dfrac{1}{4}t_{0.1}(15),20+\dfrac{1}{4}t_{0.1}(15)\right)$.

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15) (本题满分 8 分)

求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$.

(16) (本题满分 8 分)

设 $f(u)$ 具有二阶连续导数,且 $g(x,y)=f\left(\dfrac{y}{x}\right)+yf\left(\dfrac{x}{y}\right)$,求 $x^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

(17) (本题满分 9 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D|x^2+y^2-1|\,\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1\}$.

(18) (本题满分 9 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)$.

(19) (本题满分 8 分)

设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的导数连续,且 $f(0)=0$, $f'(x)\geqslant0$, $g'(x)\geqslant0$. 证明:对任何 $a\in[0,1]$,有

$$\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x\geqslant f(a)g(1).$$

(20) (本题满分 13 分)

已知齐次线性方程组

$$(\text{i})\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0,\\2x_1+3x_2+5x_3=0,\\x_1+x_2+ax_3=0\end{cases}\quad\text{和}\quad(\text{ii})\begin{cases}x_1+bx_2+cx_3=0,\\2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0\end{cases}$$

同解，求 a,b,c 的值.

(21)（本题满分 13 分）

设 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 m 阶，n 阶对称矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为 $m\times n$ 矩阵.

（Ⅰ）计算 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}$，其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m&-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}$；

（Ⅱ）利用（Ⅰ）的结果判断矩阵 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ 是否为正定矩阵，并证明你的结论.

(22)（本题满分 13 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1,&0<x<1,\ 0<y<2x,\\0,&\text{其他.}\end{cases}$$

求：（Ⅰ）(X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$；

（Ⅱ）$Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$；

（Ⅲ）$P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\,\middle|\,X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$.

(23)（本题满分 13 分）

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其样本均值为 $\overline{X}$.记 $Y_i=X_i-\overline{X}$，$i=1,2,\cdots,n$.

（Ⅰ）求 Y_i 的方差 $D(Y_i)$，$i=1,2,\cdots,n$；

（Ⅱ）求 Y_1 与 Y_n 的协方差 $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)$；

（Ⅲ）（超纲题）若 $c(Y_1+Y_n)^2$ 是 σ^2 的无偏估计量，求常数 c.（无偏估计为超纲概念，可改为“若 $E(c(Y_1+Y_n)^2)=\sigma^2$，求常数 c.”）

2006 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$______.

(2) 设函数$f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导,且$f'(x)=e^{f(x)}$, $f(2)=1$,则$f'''(2)=$______.

(3) 设函数$f(u)$ 可微,且$f'(0)=\dfrac{1}{2}$,则 $z=f(4x^2-y^2)$ 在点(1,2) 处的全微分 $\mathrm{d}z\big|_{(1,2)}=$______.

(4) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 为 2 阶单位矩阵,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$,则 $|\boldsymbol{B}|=$______.

(5) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且均服从区间[0,3] 上的均匀分布,则 $P\{\max\{X,Y\}\leqslant 1\}=$ ______.

(6) 设总体 X 的概率密度为$f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|}(-\infty<x<+\infty)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 X 的简单随机样本,其样本方差为 S^2,则 $E(S^2)=$______.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分)

(7) 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数,且$f'(x)>0$, $f''(x)>0$, Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量, Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为$f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分,若 $\Delta x>0$,则(　　)

(A) $0<\mathrm{d}y<\Delta y$.　(B) $0<\Delta y<\mathrm{d}y$.　(C) $\Delta y<\mathrm{d}y<0$.　(D) $\mathrm{d}y<\Delta y<0$.

(8) 设函数$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,且$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$,则(　　)

(A) $f(0)=0$ 且$f'_-(0)$ 存在.　(B) $f(0)=1$ 且$f'_-(0)$ 存在.

(C) $f(0)=0$ 且$f'_+(0)$ 存在.　(D) $f(0)=1$ 且$f'_+(0)$ 存在.

(9) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则级数(　　)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛.　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 收敛.　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛.

(10) 设非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x)$, $y_2(x)$, C 为任意常数,则该方程的通解是(　　)

(A) $C[y_1(x)-y_2(x)]$.　(B) $y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$.

(C) $C[y_1(x)+y_2(x)]$.　(D) $y_1(x)+C[y_1(x)+y_2(x)]$.

(11) 设$f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数,且 $\varphi'_y(x,y)\neq 0$,已知(x_0,y_0) 是$f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点,下列选项正确的是(　　)

(A) 若$f'_x(x_0,y_0)=0$,则$f'_y(x_0,y_0)=0$.　(B) 若$f'_x(x_0,y_0)=0$,则$f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

(C) 若$f'_x(x_0,y_0)\neq 0$,则$f'_y(x_0,y_0)=0$.　(D) 若$f'_x(x_0,y_0)\neq 0$,则$f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

(12) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维列向量, $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,下列选项正确的是(　　)

(A) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关.

(B) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关.

(C) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关.

(D) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关.

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行加到第 1 行得 $\boldsymbol{B}$，再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 $\boldsymbol{C}$，记 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则(　　)

(A) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$.　(B) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$.　(C) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$.　(D) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}$.

(14) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，随机变量 Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且

$$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\},$$

则必有(　　)

(A) $\sigma_1<\sigma_2$.　(B) $\sigma_1>\sigma_2$.　(C) $\mu_1<\mu_2$.　(D) $\mu_1>\mu_2$.

三、解答题(本题共 9 小题，满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15) (本题满分 7 分)

设 $f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\dfrac{\pi x}{y}}{\arctan x},\ x>0,\ y>0$. 求：

(Ⅰ) $g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$；

(Ⅱ) $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$.

(16) (本题满分 7 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{y^2-xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $y=x,y=1,x=0$ 所围成的平面区域.

(17) (本题满分 10 分)

证明：当 $0<a<b<\pi$ 时，$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a$.

(18) (本题满分 8 分)

在 xOy 坐标平面上，连续曲线 L 过点 $M(1,0)$，其上任意点 $P(x,y)(x\neq0)$ 处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax(常数 $a>0$).

(Ⅰ) 求 L 的方程；

(Ⅱ) 当 L 与直线 $y=ax$ 所围成平面图形的面积为 $\dfrac{8}{3}$ 时，确定 a 的值.

(19) (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}$ 的收敛域及和函数 $S(x)$.

(20) (本题满分 13 分)

设 4 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1+a,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2+a,2,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,3,3+a,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,4,4,4+a)^{\mathrm{T}}$，问 a 为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关？当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关时，求其一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

(21) (本题满分 13 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3，向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是

线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的两个解.

(Ⅰ) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量；

(Ⅱ) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$；

(Ⅲ) 求 $\boldsymbol{A}$ 及 $\left(\boldsymbol{A}-\frac{3}{2}\boldsymbol{E}\right)^{6}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(22) (本题满分 13 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<0,\\ \frac{1}{4}, & 0\leqslant x<2.\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

令 $Y=X^2$，$F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数.求：

(Ⅰ) Y 的概率密度 $f_Y(y)$；

(Ⅱ) $\mathrm{Cov}(X,Y)$；

(Ⅲ) $F\left(-\frac{1}{2},4\right)$.

(23) (本题满分 13 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1,\\ 1-\theta, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 θ 是未知参数 $(0<\theta<1)$. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，记 N 为样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中小于 1 的个数.求：

(Ⅰ) θ 的矩估计；

(Ⅱ) θ 的最大似然估计.

2007 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 10 小题,每小题 4 分,满分 40 分)

(1) 当 $x \to 0^+$ 时,与$\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是(　　)

(A) $1 - e^{\sqrt{x}}$.　　(B) $\ln(1+\sqrt{x})$.　　(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$.　　(D) $1 - \cos\sqrt{x}$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,下列命题错误的是(　　)

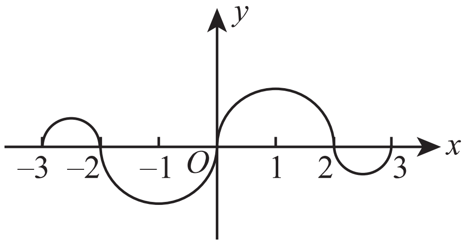
(A) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$.

(B) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$.

(C) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在.

(D) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在.

(3) 如图,连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2]$,$[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周,在区间 $[-2,0]$,$[0,2]$ 上的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周.设 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$,则下列结论正确的是(　　)



(A) $F(3) = -\dfrac{3}{4}F(-2)$.　　(B) $F(3) = \dfrac{5}{4}F(2)$.

(C) $F(-3) = \dfrac{3}{4}F(2)$.　　(D) $F(-3) = -\dfrac{5}{4}F(-2)$.

(4) 设函数 $f(x,y)$ 连续,则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\,dy$ 等于(　　)

(A) $\int_0^1 dy\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\,dx$.　　(B) $\int_0^1 dy\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\,dx$.

(C) $\int_0^1 dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y}f(x,y)\,dx$.　　(D) $\int_0^1 dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\,dx$.

(5) 设某商品的需求函数为 $Q=160-2p$,其中 Q,p 分别表示需求量和价格,如果该商品需求弹性的绝对值等于 1,则商品的价格是(　　)

(A) 10.　　(B) 20.　　(C) 30.　　(D) 40.

(6) 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 渐近线的条数为(　　)

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

(7) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,则下列向量组线性相关的是(　　)

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$.

(8) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$(　　)

(A) 合同且相似.　　(B) 合同，但不相似.

(C) 不合同，但相似.　　(D) 既不合同，也不相似.

(9) 某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率为 $p(0<p<1)$，则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为(　　)

(A) $3p(1-p)^2$.　　(B) $6p(1-p)^2$.　　(C) $3p^2(1-p)^2$.　　(D) $6p^2(1-p)^2$.

(10) 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，且 X 与 Y 不相关，$f_X(x)$，$f_Y(y)$ 分别表示 X,Y 的概率密度，则在 $Y=y$ 的条件下，X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为(　　)

(A) $f_X(x)$.　　(B) $f_Y(y)$.　　(C) $f_X(x)f_Y(y)$.　　(D) $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$.

二、填空题(本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分)

(11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$______.

(12) 设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，则 $y^{(n)}(0)=$______.

(13) 设 $f(u,v)$ 是二元可微函数，$z=f\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{x}{y}\right)$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$______.

(14) 微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x}\right)^3$ 满足 $y\big|_{x=1}=1$ 的特解为 $y=$______.

(15) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^3$ 的秩为______.

(16) 在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数，则这两个数之差的绝对值小于 $\dfrac{1}{2}$ 的概率为______.

三、解答题(本题共 8 小题，满分 86 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y\ln y-x+y=0$ 确定，试判断曲线 $y=y(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近的凹凸性.

(18) (本题满分 11 分)

设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2, & |x|+|y|\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1<|x|+|y|\leqslant 2,\end{cases}$$

计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 2\}$.

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导且存在相等的最大值，又 $f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$.证明：

(Ⅰ)存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $f(\eta)=g(\eta)$；

(Ⅱ)存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

(20)(本题满分 11 分)

将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x-4}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数，并指出其收敛区间.

(21)(本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+2x_2+ax_3=0,\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}\qquad ①$$

与方程组

$$x_1+2x_2+x_3=a-1\qquad ②$$

有公共解，求 a 的值及所有公共解.

(22)(本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 的一个特征向量.记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ)验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量，并求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值与特征向量；

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

(23)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,0<y<1,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅰ)求 $P\{X>2Y\}$；

(Ⅱ)求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

(24)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}, & 0<x<\theta,\\ \dfrac{1}{2(1-\theta)}, & \theta\leqslant x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中参数 $\theta(0<\theta<1)$ 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值.

(Ⅰ)求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；

(Ⅱ)(超纲题)判断 $4\overline{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量，并说明理由.(无偏估计为超纲概念，可改为“验证是否有 $E(4\overline{X}^2)=\theta^2$.”)

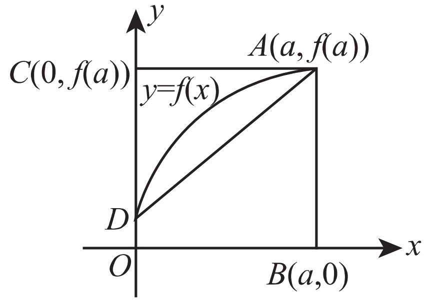
2008 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分)

(1) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续,则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x}$ 的(　　)

(A) 跳跃间断点.　　(B) 可去间断点.　　(C) 无穷间断点.　　(D) 振荡间断点.

(2) 如图,曲线段的方程为 $y=f(x)$,函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有连续的导数,则定积分 $\int_0^a xf'(x)\,\mathrm{d}x$ 等于(　　)



(A) 曲边梯形 $ABOD$ 的面积.

(B) 梯形 $ABOD$ 的面积.

(C) 曲边三角形 ACD 的面积.

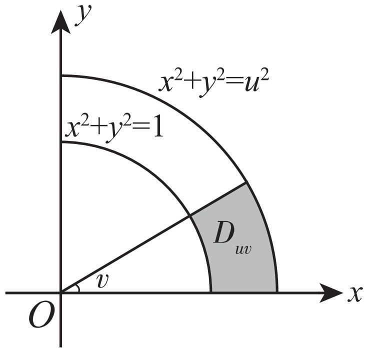
(D) 三角形 ACD 的面积.

(3) 已知 $f(x,y)=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^4}}$,则(　　)

(A) $f_x'(0,0)$, $f_y'(0,0)$ 都存在.　　(B) $f_x'(0,0)$ 不存在, $f_y'(0,0)$ 存在.

(C) $f_x'(0,0)$ 存在, $f_y'(0,0)$ 不存在.　　(D) $f_x'(0,0)$, $f_y'(0,0)$ 都不存在.

(4) 设函数 f 连续.若 $F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\dfrac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中区域 D_{uv} 为图中阴影部分,则 $\dfrac{\partial F}{\partial u}=$(　　)



(A) $vf(u^2)$.　　(B) $\dfrac{v}{u}f(u^2)$.

(C) $vf(u)$.　　(D) $\dfrac{v}{u}f(u)$.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$,则(　　)

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.　　(B) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.

(C) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.　　(D) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.

(6) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$,则在实数域上与 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵为(　　)

(A) $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$.　　(C) $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$.

(7) 设随机变量 X,Y 独立同分布,且 X 的分布函数为 $F(x)$,则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为(　　)

(A) $F^2(x)$.　　(B) $F(x)F(y)$.

(C) $1-[1-F(x)]^2$.　　(D) $[1-F(x)][1-F(y)]$.

(8) 设随机变量 $X\sim N(0,1)$, $Y\sim N(1,4)$,且相关系数 $\rho_{XY}=1$,则(　　)

(A) $P\{Y=-2X-1\}=1$.　　(B) $P\{Y=2X-1\}=1$.

(C) $P\{Y=-2X+1\}=1$.　　(D) $P\{Y=2X+1\}=1$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

(9) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & |x|\leqslant c,\\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>c\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,则 $c=$______.

(10) 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x+x^3}{1+x^4}$,则 $\displaystyle\int_2^{2\sqrt{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=$______.

(11) 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,则 $\displaystyle\iint_D(x^2-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$______.

(12) 微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $y=$______.

(13) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,2,2, $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵,则 $|4\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}|=$______.

(14) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布,则 $P\{X=E(X^2)\}=$______.

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15) (本题满分 9 分)

计算 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}$.

(16) (本题满分 10 分)

设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数,其中 φ 具有二阶导数,且 $\varphi'\neq -1$.

(Ⅰ) 求 $\mathrm{d}z$;

(Ⅱ) 记 $u(x,y)=\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$,求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

(17) (本题满分 11 分)

计算 $\displaystyle\iint_D\max\{xy,1\}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$.

(18) (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是周期为 2 的连续函数.

(Ⅰ) 证明对任意的实数 t,有 $\displaystyle\int_t^{t+2}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$;

(Ⅱ) 证明 $G(x)=\displaystyle\int_0^x\left[2f(t)-\int_t^{t+2}f(s)\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$ 是周期为 2 的周期函数.

(19) (本题满分 10 分)

设银行存款的年利率为 $r=0.05$,并依年复利计算.某基金会希望通过存款 A 万元实现第一年提取 19 万元,第二年提取 28 万元,…,第 n 年提取 $(10+9n)$ 万元,并能按此规律一直提取下去,问 A 至少应为多少万元?

(20) (本题满分 12 分)

设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$,其中

$$A=\begin{pmatrix}2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a\end{pmatrix}_{n\times n},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)证明行列式 $|A|=(n+1)a^n$;

(Ⅱ)当 a 为何值时,该方程组有唯一解,并求 x_1;

(Ⅲ)当 a 为何值时,该方程组有无穷多解,并求通解.

(21)(本题满分 10 分)

设 A 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 A 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量,向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $A\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(Ⅰ)证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关;

(Ⅱ)令 $P=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,求 $P^{-1}AP$.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\{X=i\}=\frac{1}{3}(i=-1,0,1)$,$Y$ 的概率密度为

$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 记 $Z=X+Y$.

(Ⅰ)求 $P\left\{Z\leqslant\frac{1}{2}\,\middle|\,X=0\right\}$;

(Ⅱ)求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

(23)(本题满分 11 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本.记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\qquad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\qquad T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2.$$

(Ⅰ)(超纲题)证明 T 是 μ^2 的无偏估计量;(无偏估计为超纲概念,可改为"证明 $E(T)=\mu^2$.")

(Ⅱ)当 $\mu=0,\ \sigma=1$ 时,求 $D(T)$.

2009 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分)

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为(　　)

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 无穷多个.

(2) 当 $x\to 0$ 时, $f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小量,则(　　)

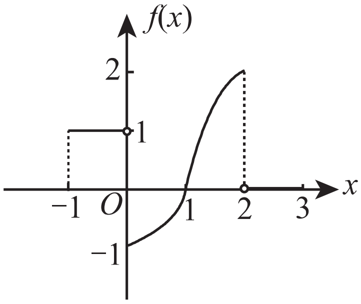
(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$.　　(B) $a=1,b=\dfrac{1}{6}$.

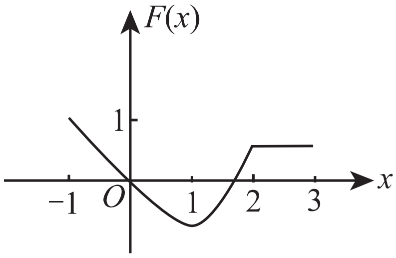
(C) $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$.　　(D) $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$.

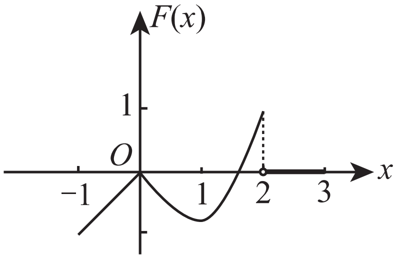
(3) 使不等式 $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t>\ln x$ 成立的 x 的范围是(　　)

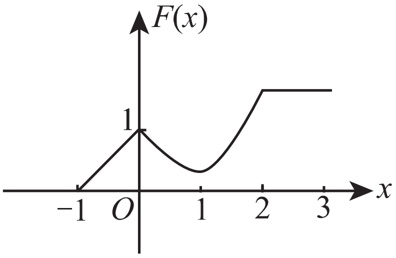
(A) $(0,1)$.　　(B) $\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$.　　(C) $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$.　　(D) $(\pi,+\infty)$.

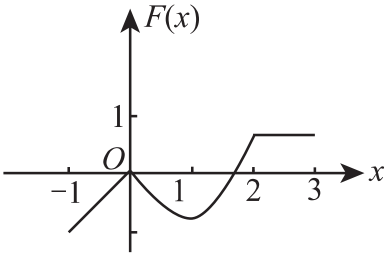
(4) 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形如图所示,则函数 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的图形为(　　)



(A)


(B)


(C)


(D)


(5) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶方阵, $\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵.若 $|\boldsymbol{A}|=2$, $|\boldsymbol{B}|=3$,则分块矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为(　　)

(A) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B}^*\\ 2\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^*\\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.　　(C) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}^*\\ 2\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{A}^*\\ 3\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

(6) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{P}$ 均为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{P}$ 的转置矩阵,且 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为(　　)

(A)$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　(B)$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　(C)$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　(D)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

(7) 设事件 A 与事件 B 互不相容,则(　　)

(A)$P(\bar{A}\bar{B})=0$.　(B)$P(AB)=P(A)P(B)$.

(C)$P(A)=1-P(B)$.　(D)$P(\bar{A}\cup\bar{B})=1$.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$,Y 的概率分布为 $P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\dfrac{1}{2}$.记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数,则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为(　　)

(A)0.　(B)1.　(C)2.　(D)3.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$______.

(10) 设 $z=(x+e^y)^x$,则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=$______.

(11) 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^n-(-1)^n}{n^2}x^n$ 的收敛半径为______.

(12) 设某产品的需求函数为 $Q=Q(p)$,其对价格 p 的弹性 $\varepsilon_p=0.2$,则当需求量为 10 000 件时,价格增加 1 元会使产品收益增加______元.

(13) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^{\mathrm T}$, $\boldsymbol{\beta}=(1,0,k)^{\mathrm T}$,若矩阵 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm T}$ 相似于 $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,则 $k=$______.

(14) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 为来自二项分布总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本,$\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差.记统计量 $T=\bar{X}-S^2$,则 $E(T)=$______.

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 9 分)

求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

(16)(本题满分 10 分)

计算不定积分 $\displaystyle\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)dx\ (x>0)$.

(17)(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_D(x-y)\,dxdy$,其中 $D=\{(x,y)\mid(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant2,\ y\geqslant x\}$.

(18)(本题满分 11 分)

(Ⅰ)证明拉格朗日中值定理:若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(Ⅱ)证明:若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导,且 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$,则 $f'_+(0)$ 存在,且 $f'_+(0)=A$.

(19)（本题满分 10 分）

设曲线 $y=f(x)$，其中 $f(x)$ 是可导函数，且 $f(x)>0$. 已知曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0, x=1$ 及 $x=t(t>1)$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的 πt 倍，求该曲线的方程.

(20)（本题满分 11 分）

设

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

（Ⅰ）求满足 $A\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$, $A^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\xi}_3$；

（Ⅱ）对（Ⅰ）中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\xi}_3$，证明 $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

(21)（本题满分 11 分）

设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3.$$

（Ⅰ）求二次型 f 的矩阵的所有特征值；

（Ⅱ）若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值.

(22)（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-x}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（Ⅰ）求条件概率密度 $f_{Y|X}(y\mid x)$；

（Ⅱ）求条件概率 $P\{X\leqslant 1\mid Y\leqslant 1\}$.

(23)（本题满分 11 分）

袋中有 1 个红球、2 个黑球与 3 个白球. 现有放回地从袋中取两次，每次取一个球. 以 X,Y,Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

（Ⅰ）求 $P\{X=1\mid Z=0\}$；

（Ⅱ）求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

1997 年真题参考答案

一、填空题

(1) $e^{f(x)}\left[\frac{1}{x}f'(\ln x)+f'(x)f(\ln x)\right]dx$.

(2) $\frac{\pi}{4-\pi}$.　(3) $y_t=C+(t-2)2^t$,其中 C 为任意常数.　(4) $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$.　(5) t; 9.

二、选择题

(1) B.　(2) C.　(3) C.　(4) D.　(5) A.

三、证明略.

四、$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y^2}{1-xy}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{z}{xz-x}\frac{\partial f}{\partial z}$.

五、(1) 当销售量 $x=\frac{5}{2}(4-t)$ 时,利润最大.　(2) $t=2$ 时,政府税收总额最大.

六、证明略.(证明 $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=F(0)$,并且当 $x>0$ 时,$F'(x)\geqslant0$.)

七、(1) $\overline{OP_n}=\frac{1}{2^{n-1}}$.　(2) $\frac{4}{3}$.

八、$f(t)=(4\pi t^2+1)e^{4\pi t^2}$.

九、(1) $PQ=\begin{pmatrix}A & \alpha\\ 0 & |A|(b-\alpha^TA^{-1}\alpha)\end{pmatrix}$,其中零向量 $\mathbf{0}$ 为 n 维行向量.

(2) 证明略.(利用(1)的结论,证明 $|Q|\neq0\Leftrightarrow b-\alpha^TA^{-1}\alpha\neq0$.)

十、(1) A 的属于特征值 3 的特征向量为 $k(1,0,1)^T$,其中 k 为任意非零常数.

(2) $A=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}13 & -2 & 5\\ -2 & 10 & 2\\ 5 & 2 & 13\end{pmatrix}$.

十一、$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \frac{5x+7}{16}, & -1\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant1.\end{cases}$

十二、$\frac{70}{6}\approx11.67$.

十三、$f(t)=\begin{cases}25te^{-5t}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant0.\end{cases}$ 数学期望为 $\frac{2}{5}$,方差为 $\frac{2}{25}$.

1998 年真题参考答案

一、填空题

(1) $\frac{1}{\mathrm{e}}$. (2) $-\frac{\ln x}{x}+C$,其中 C 为任意常数.

(3) $y_t=C(-5)^t+\frac{5}{12}\left(t-\frac{1}{6}\right)$,其中 C 为任意常数. (4) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. (5) $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{100}$; 2.

二、选择题

(1) D. (2) B. (3) C. (4) B. (5) A.

三、$\mathrm{d}z=\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}[(2x+y)\mathrm{d}x+(2y-x)\mathrm{d}y]$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{y^2-xy-x^2}{x^2+y^2}\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}$.

四、$\frac{8}{15}$.

五、窖藏 $t=\frac{1}{25r^2}$ 年售出,总收入现值最大;当 $r=0.06$ 时,$t\approx 11$ 年.

六、证明略.(可利用微分中值定理.)

七、(1) $S_n=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{n(n+1)\sqrt{n(n+1)}}$. (2) $\frac{4}{3}$.

八、微分方程为 $x^2y'=3y^2-2xy$,即 $y'=3\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{2y}{x}$.满足给定初始条件的解是 $y-x=-x^3y$.

九、(1) $\boldsymbol{A}^2$ 为 n 阶零矩阵.

(2) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 0, $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 0 的特征向量为 $k_1(-b_2,b_1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-b_3,0,b_1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}+\cdots+k_{n-1}(-b_n,0,0,\cdots,b_1)^{\mathrm{T}}$,其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}$ 是不全为零的任意常数.

十、对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}(k+2)^2&0&0\\0&(k+2)^2&0\\0&0&k^2\end{pmatrix}$;当 $k\neq-2$ 且 $k\neq0$ 时, $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

十一、期望 $\approx$ 14 166.67 元.

十二、(1) $\frac{29}{90}$. (2) $\frac{20}{61}$.

1999 年真题参考答案

一、填空题

(1) $\frac{4}{\pi}-1$.　(2) 4.　(3) $\boldsymbol{O}_{3\times 3}$,即 3 阶零矩阵.　(4) 16.　(5) 0.

二、选择题

(1) A.　(2) C.　(3) B.　(4) D.　(5) A.

三、所求切线方程为 $y-\frac{1}{\sqrt{a}}=-\frac{1}{2\sqrt{a^3}}(x-a)$,面积为 $\frac{9}{4}\sqrt{a}$.当切点沿 x 轴正方向趋于无穷远时,$\lim\limits_{a\to+\infty}S=+\infty$,当切点沿 y 轴正方向趋于无穷远时,$\lim\limits_{a\to 0^+}S=0$.

四、$4-\frac{\pi}{2}$.

五、当 $x_1=6\left(\frac{p_2\alpha}{p_1\beta}\right)^{\beta}$, $x_2=6\left(\frac{p_1\beta}{p_2\alpha}\right)^{\alpha}$ 时,投入总费用最小.

六、$y(x)=\begin{cases}e^{2x}-1, & x\leqslant 1,\\ (1-e^{-2})e^{2x}, & x>1.\end{cases}$

七、$\frac{3}{4}$.

八、(1) 证明略.(可利用零点定理.)

(2) 证明略.(可考虑函数 $F(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$,对 $F(x)$ 使用罗尔定理.)

九、$a=2$, $b=-3$, $c=2$, $\lambda_0=1$.

十、证明略.($\boldsymbol{B}$ 为对称矩阵, $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})$.)

十一、(1) $P\{U=0, V=0\}=\frac{1}{4}$,$P\{U=0, V=1\}=0$,$P\{U=1, V=0\}=\frac{1}{4}$,$P\{U=1, V=1\}=\frac{1}{2}$.

(2) $r=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

十二、证明略.

2000 年真题参考答案

一、填空题

(1) $yf_1' + \frac{1}{y}f_2' - \frac{y}{x^2}g'$.　(2) $\frac{\pi}{4e}$.　(3) 24.　(4) $[1,3]$.　(5) $\frac{8}{9}$.

二、选择题

(1) D.　(2) B.　(3) C.　(4) A.　(5) C.

三、$y = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(1 + 2x)e^{2x}$.

四、$a^2\left(\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\right)$.

五、(1) 当 $p_1 = 10, Q_1 = 4, p_2 = 7, Q_2 = 5$ 时，利润最大，为 52 万元.

(2) 当 $Q_1 = 5, Q_2 = 4, p_1 = p_2 = 8$ 时，利润最大，为 49 万元.

六、单调递增区间为 $(-\infty, -1), (0, +\infty)$，单调递减区间为 $(-1, 0)$. 极大值为 $f(-1) = -2e^{\frac{\pi}{4}}$，极小值为 $f(0) = -e^{\frac{\pi}{2}}$. 曲线有两条渐近线：$y_1 = e^{\pi}(x - 2)$，$y_2 = x - 2$.

七、$\sum\limits_{n=0}^{\infty} I_n = \ln(2 + \sqrt{2})$.

八、证明略. (考虑函数 $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$. $F(0) = F(\pi) = 0$，再证明存在 $(0,\pi)$ 内一点 ξ，满足 $F(\xi) = 0$，对 $F(x)$ 使用罗尔定理.)

九、(1) 当 $a \neq -4$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一地线性表示.

(2) 当 $a = -4$，且 $3b - c \neq 1$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(3) 当 $a = -4$，且 $3b - c = 1$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表示不唯一.

$\boldsymbol{\beta} = k\boldsymbol{\alpha}_1 - (2k + b + 1)\boldsymbol{\alpha}_2 + (2b + 1)\boldsymbol{\alpha}_3$，其中 k 为任意常数.

十、当 $a_1a_2\cdots a_n \neq (-1)^n$ 时，二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为正定二次型.

十一、(1) $E(X) = e^{\mu + \frac{1}{2}}$.　(2) $(-0.98, 0.98$.　(3) $(e^{-0.48}, e^{1.48})$.

十二、证明略. (分别计算 $E(X), E(Y), E(XY)$ 及 $\mathrm{Cov}(X,Y)$.)

2001 年真题参考答案

一、填空题

(1) $-\dfrac{\alpha}{\beta}$. (2) $W_t = 1.2W_{t-1} + 2$. (3) -3. (4) $\dfrac{1}{12}$. (5) F; $(10,5)$.

二、选择题

(1) B. (2) D. (3) C. (4) D. (5) A.

三、$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{y}{x}\dfrac{\partial f}{\partial y} + \left[1 - \dfrac{\mathrm{e}^x(x-z)}{\sin(x-z)}\right]\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

四、$\dfrac{1}{2}$.

五、$-\dfrac{2}{3}$.

六、(1) 当 $p=-\dfrac{4}{5}$，$q=3$ 时，S 最大. (2) 最大值为 $\dfrac{225}{32}$.

七、证明略.(可考虑函数 $F(x)=x\mathrm{e}^{1-x}f(x)$，利用积分中值定理和罗尔定理.)

八、$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = -\mathrm{e}^x\ln(1-x)$，$-1 \leqslant x < 1$.

九、(1) $a=-2$.

(2) $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

十、(1) 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵形式为

$$f(\boldsymbol{X}) = (x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

证明略.

(2) 因为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 合同，所以 $g(\boldsymbol{X})$ 与 $f(\boldsymbol{X})$ 有相同的规范形.

十一、最多可装 98 箱.

十二、$p(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(2-u), & 0 < u < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

2002 年真题参考答案

一、填空题

(1) $\dfrac{1}{1-2a}$.　(2) $\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y$.　(3) -1.　(4) -0.02.　(5) $\overline{X}-1$.

二、选择题

(1) B.　(2) 无正确答案.(考题有误:幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径等于 R,推不出 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{1}{R}$,因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 可能不存在.增加"设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right|$ 均存在"的条件后,选项 A 正确.)

(3) D.　(4) B.　(5) C.

三、$\dfrac{\pi}{6}$.

四、$\mathrm{d}u = \left(f_x' + f_z' \dfrac{x+1}{z+1}\mathrm{e}^{x-z}\right)\mathrm{d}x + \left(f_y' - f_z' \dfrac{y+1}{z+1}\mathrm{e}^{y-z}\right)\mathrm{d}y$.

五、$-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$,其中 C 为任意常数.

六、(1) $V_1 = \dfrac{4\pi}{5}(32-a^5)$, $V_2 = \pi a^4$.　(2) 当 $a=1$ 时,V_1+V_2 取得最大值,为 $\dfrac{129}{5}\pi$.

七、(1) 证明略.(分别计算 y', y'',代入所需证明的等式.)

(2) $y(x) = \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{x}(-\infty < x < +\infty)$.

八、证明略.(可利用连续函数的最值定理与介值定理.)

九、当 $a \neq b$ 且 $a \neq (1-n)b$ 时,方程组仅有零解.

当 $a=b$ 时,方程组有无穷多解,其解为 $\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$,其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}$ 为任意常数,$\boldsymbol{\alpha}_1 = (-1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (-1,0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_{n-1} = (-1,0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $a=(1-n)b$ 时,方程组有无穷多解,其解为 $\boldsymbol{x} = k(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$,其中 k 为任意常数.

十、(1) $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 -2, -2, 0.

(2) 当 $k>2$ 时,$\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵.

十一、(1) X 和 Y 的联合概率分布为

$$(X,Y) \sim \begin{pmatrix} (-1,-1) & (-1,1) & (1,-1) & (1,1) \\ \dfrac{1}{4} & 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

(2) 2.

十二、$F(y) = \begin{cases} 0, & y<0, \\ 1-\mathrm{e}^{-\frac{y}{5}}, & 0 \leqslant y < 2, \\ 1, & y \geqslant 2. \end{cases}$

2003 年真题参考答案

一、填空题

(1) $\lambda > 2$.　(2) $4a^6$.　(3) a^2.　(4) -1.　(5) 0.9.　(6) $\frac{1}{2}$.

二、选择题

(1) D.　(2) A.　(3) B.　(4) C.　(5) B.　(6) C.

三、令 $f(1)=\frac{1}{\pi}$，则 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上连续.

四、$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x^2+y^2$.

五、$I=\frac{\pi}{2}(1+e^{\pi})$.

六、$f(x)=1-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\ (|x|<1)$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值，极大值为 $f(0)=1$.

七、(1) $F'(x)+2F(x)=4e^{2x}$.　(2) $F(x)=e^{2x}-e^{-2x}$.

八、证明略.(可利用介值定理和罗尔定理.)

九、(1) 当 $b\neq 0$ 且 $b+\sum_{i=1}^{n}a_i\neq 0$ 时，方程组仅有零解.

(2) 当 $b=0$ 时，方程组有非零解，它的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\left(-\frac{a_2}{a_1},1,0,\cdots,0\right)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\left(-\frac{a_3}{a_1},0,1,\cdots,0\right)^{\mathrm{T}},\cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\left(-\frac{a_n}{a_1},0,0,\cdots,1\right)^{\mathrm{T}}.$$

当 $b=-\sum_{i=1}^{n}a_i$ 时，方程组有非零解，它的一个基础解系为 $(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

十、(1) $a=1,\ b=2$.

(2) 令 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵.

在正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$ 下，二次型 f 化为标准形 $f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$.

十一、$Y=F(X)$ 的分布函数 $G(Y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ y, & 0<y<1,\\ 1, & y\geqslant 1.\end{cases}$

十二、$g(u)=0.3f(u-1)+0.7f(u-2)$.

2004 年真题参考答案

一、填空题

(1)1；-4. (2) $-\dfrac{g'(v)}{[g(v)]^2}$. (3) $-\dfrac{1}{2}$. (4)2. (5) $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. (6)σ^2.

二、选择题

(7) A. (8) D. (9) C. (10) B. (11) D. (12) D. (13) B. (14) C.

三、解答题

(15) $\dfrac{4}{3}$.

(16) $\dfrac{16}{9}(3\pi-2)$.

(17) 证明略.

(18) (Ⅰ)$E_d=\dfrac{P}{20-P}$.

(Ⅱ) 当 $10<P<20$ 时,价格降低反而使收益增加.

(19) (Ⅰ)$y'=xy+\dfrac{x^3}{2}$,初始条件为 $y(0)=0$.

(Ⅱ)$S(x)=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}-\dfrac{x^2}{2}-1\ (-\infty<x<+\infty)$.

(20) (Ⅰ) 当 $a=0$,b 为任意常数时,$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(Ⅱ) 当 $a\neq0$ 且 $a\neq b$ 时,$\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一地线性表示为 $\boldsymbol{\beta}=\left(1-\dfrac{1}{a}\right)\boldsymbol{\alpha}_1+\dfrac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}_2$.

(Ⅲ) 当 $a=b\neq0$ 时,$\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示,但表示不唯一,表示式为

$$\boldsymbol{\beta}=\left(1-\frac{1}{a}\right)\boldsymbol{\alpha}_1+\left(\frac{1}{a}+k\right)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3,$$

其中 k 为任意常数.

(21) (Ⅰ) 当 $b=0$ 或 $n=1$ 时,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=1$,任意非零列向量均为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

当 $b\neq0$ 且 $n\geqslant2$ 时,$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1+(n-1)b$,$\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1-b$. $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 的特征向量为 $k_1(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$,其中 k_1 为任意非零常数,$\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1-b$ 的特征向量为 $k_2(1,-1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}+k_3(1,0,-1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}+\cdots+k_n(1,0,\cdots,0,-1)^{\mathrm{T}}$,其中 k_2,k_3,$\cdots$,k_n 为不全为零的任意常数.

(Ⅱ)$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&-1&0&\cdots&0\\1&0&-1&0&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots\\1&0&\cdots&0&-1\end{pmatrix}$.

(22)(Ⅰ)(X,Y) 的概率分布为

$$(X,\ Y)\sim\begin{pmatrix}(0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1)\\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{12} & \dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{12}\end{pmatrix}.$$

(Ⅱ)$\rho_{XY}=\dfrac{1}{\sqrt{15}}$.

(Ⅲ)Z 的概率分布为 $P\{Z=0\}=\dfrac{2}{3}$, $P\{Z=1\}=\dfrac{1}{4}$, $P\{Z=2\}=\dfrac{1}{12}$.

(23)(Ⅰ)$\hat{\beta}=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$.

(Ⅱ)$\hat{\beta}=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

(Ⅲ)$\hat{\alpha}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

2005 年真题参考答案

一、填空题

(1)2.　(2)$xy=2$.　(3)$2\mathrm{e}\mathrm{d}x+(\mathrm{e}+2)\mathrm{d}y$.　(4) $\frac{1}{2}$.　(5) $\frac{13}{48}$.　(6)0.4; 0.1.

二、选择题

(7) B.　(8) A.　(9) D.　(10) B.　(11) C.　(12) A.　(13) D.　(14) C.

三、解答题

(15) $\frac{3}{2}$.

(16) $x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{2y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)$.

(17) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$.

(18) $S(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}, & x\in(-1,1)\setminus\{0\},\\ 0, & x=0.\end{cases}$

(19) 证明略.(可考虑 $F(x)=\int_0^x g(t)f'(t)\mathrm{d}t+\int_0^1 f(t)g'(t)\mathrm{d}t-f(x)g(1)$, $x\in[0,1]$,证明 $F'(x)\leqslant 0$.)

(20) $a=2$, $b=1$, $c=2$.

(21) (Ⅰ)$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$.

(Ⅱ)矩阵 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ 是正定矩阵.证明略.($\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$ 是正定矩阵,其各阶顺序主子式均大于零,证明 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ 的各阶顺序主子式均大于零.)

(22) (Ⅰ)$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$　$f_Y(y)=\begin{cases}1-\frac{y}{2}, & 0<y<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(Ⅱ)$f_Z(z)=\begin{cases}1-\frac{z}{2}, & 0<z<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(Ⅲ) $\frac{3}{4}$.

(23) (Ⅰ)$D(Y_i)=\frac{n-1}{n}\sigma^2$, $i=1,2,\quad n$. (Ⅱ)$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)=-\frac{1}{n}\sigma^2$. (Ⅲ)$c=\frac{n}{2(n-2)}$.

2006 年真题参考答案

一、填空题

(1) 1.　(2) $2e^3$.　(3) $4dx - 2dy$.　(4) 2.　(5) $\frac{1}{9}$.　(6) 2.

二、选择题

(7) A.　(8) C.　(9) D.　(10) B.　(11) D.　(12) A.　(13) B.　(14) A.

三、解答题

(15) (Ⅰ) $\frac{1}{x} - \frac{1-\pi x}{\arctan x}$.　(Ⅱ) π.

(16) $\frac{2}{9}$.

(17) 证明略.(可考虑 $f(x) = x\sin x + 2\cos x + \pi x,\ x \in [0,\pi]$,利用导数分析 $f(x)$ 的单调性.)

(18) (Ⅰ) $y = ax^2 - ax$.　(Ⅱ) $a = 2$.

(19) 收敛域为 $[-1,1]$;$S(x) = 2x^2\arctan x - x\ln(1+x^2),\ x \in [-1,1]$.

(20) 当 $a = 0$ 时, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关, $\boldsymbol{\alpha}_1$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组,且 $\boldsymbol{\alpha}_2 = 2\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = 3\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_4 = 4\boldsymbol{\alpha}_1$.

当 $a = -10$ 时, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关, $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组,且 $\boldsymbol{\alpha}_1 = -\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_4$.

(21) (Ⅰ) $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0, 0, 3.属于特征值 0 的特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2$,其中 k_1, k_2 为不全为零的任意常数,属于特征值 3 的特征向量为 $k(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,其中 k 为任意非零常数.

(Ⅱ) $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$.

(Ⅲ) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\left(\boldsymbol{A} - \frac{3}{2}\boldsymbol{E}\right)^6 = \left(\frac{3}{2}\right)^6\boldsymbol{E}$.

(22) (Ⅰ) $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0 < y < 1, \\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1 \leqslant y < 4, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$　(Ⅱ) $\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{2}{3}$.　(Ⅲ) $\frac{1}{4}$.

(23) (Ⅰ) $\hat{\theta} = \frac{3}{2} - \overline{X}$.　(Ⅱ) $\hat{\theta} = \frac{N}{n}$.

2007 年真题参考答案

一、选择题

(1)B. (2)D. (3)C. (4)B. (5)D. (6)D. (7)A. (8)B. (9)C. (10)A.

二、填空题

(11) 0. (12) $\dfrac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}$. (13) $-\dfrac{2y}{x}f_1'+\dfrac{2x}{y}f_2'$. (14) $\dfrac{x}{\sqrt{\ln x+1}}$. (15) 1. (16) $\dfrac{3}{4}$.

三、解答题

(17) 曲线 $y=y(x)$ 在点(1,1 附近是凸的.

(18) $\dfrac{1}{3}+4\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$.

(19) 证明略.

(20) $\dfrac{1}{x^2-3x-4}=-\dfrac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\dfrac{1}{3^{n+1}}+\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right](x-1)^n,\ x\in(-1,3)$.

(21) 当 $a=1$ 时，$\boldsymbol{x}=k(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$,其中 k 为任意常数,是方程组①和②的公共解;当 $a=2$ 时，$\boldsymbol{x}=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$是方程组①和②的唯一公共解.

(22) (Ⅰ) 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 -2 的特征向量为 $k_1(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$,其中 k_1 为任意非零常数;矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 1 的特征向量为 $k_2(1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_3(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$,其中 k_2,k_3为不全为零的常数.

(Ⅱ) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$.

(23) (Ⅰ) $\dfrac{7}{24}$.

(Ⅱ) $f_Z(z)=\begin{cases}2z-z^2, & 0<z\leqslant 1,\\ z^2-4z+4, & 1<z\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(24) (Ⅰ) $\hat{\theta}=2\overline{X}-\dfrac{1}{2}$.

(Ⅱ) $E(4\overline{X}^2)\neq\theta^2$.因此,$4\overline{X}^2$不是 θ^2 的无偏估计量.

2008 年真题参考答案

一、选择题

(1)B. (2)C. (3)B. (4)A. (5)C. (6)D. (7)A. (8)D.

二、填空题

(9)1. (10) $\frac{1}{2}\ln 3$. (11) $\frac{\pi}{4}$. (12) $\frac{1}{x}$. (13) 3. (14) $\frac{1}{2e}$.

三、解答题

(15) $-\frac{1}{6}$.

(16) (Ⅰ) $\mathrm{d}z=\frac{2x-\varphi'(x+y+z)}{\varphi'(x+y+z)+1}\mathrm{d}x+\frac{2y-\varphi'(x+y+z)}{\varphi'(x+y+z)+1}\mathrm{d}y$.

(Ⅱ) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-2(2x+1)\varphi''(x+y+z)}{[\varphi'(x+y+z)+1]^3}$.

(17) $\frac{19}{4}+\ln 2$.

(18) 证明略.

(19) A 至少应为 3 980 万元.

(20) (Ⅰ) 证明略.

(Ⅱ) $a\neq 0$ 时,方程组有唯一解,$x_1=\frac{n}{(n+1)a}$.

(Ⅲ) $a=0$ 时,方程组有无穷多解,通解为 $\boldsymbol{x}=k(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}+(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$,其中 k 为任意常数.

(21) (Ⅰ) 证明略.

(Ⅱ $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(22) (Ⅰ) $\frac{1}{2}$.

(Ⅱ) $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1\leqslant z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(23) (Ⅰ) 证明略.

(Ⅱ $\frac{2}{n(n-1)}$.

2009 年真题参考答案

一、选择题

(1)C. (2)A. (3)A. (4)D. (5)B. (6)A. (7)D. (8)B.

二、填空题

(9) $\frac{3}{2}\mathrm{e}$. (10) $2\ln 2+1$. (11) $\frac{1}{\mathrm{e}}$. (12) 8 000. (13) 2. (14) np^2.

三、解答题

(15) $f(x,y)$ 在点 $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 处取得极小值 $f\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

(16) $x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})-\frac{\sqrt{x}}{2(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}-C$,其中 C 为任意常数.

(17) $-\frac{8}{3}$.

(18) 证明略.

(19 $x=\frac{1}{3\sqrt{y}}+\frac{2}{3}y, x\geqslant 1$.

(20) (Ⅰ) 满足 $A\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有　　为 $\boldsymbol{\xi}_2=k_1(1,-1,2)^{\mathrm{T}}+(0,0,1)^{\mathrm{T}}$,其中 k_1 为任意常数;满足 $A^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_3=k_2(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_3(0,0,1)^{\mathrm{T}}+\left(-\frac{1}{2},0,0\right)^{\mathrm{T}}$,其中 k_2,k_3 为任意常数.

(Ⅱ) 证明略.

(21) (Ⅰ) $a, a-2, a+1$.

(Ⅱ) $a=2$.

(22) (Ⅰ) 当 $f_X(x)\neq 0$,即 $x>0$ 时, $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(Ⅱ) $\frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}$.

(23) (Ⅰ) $\frac{4}{9}$.

(Ⅱ) X 和 Y 的联合分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0