1987 年全国硕士研究生招生考试试题

【编者注】1987 年到 1996 年的数学试卷Ⅲ为现在的数学二.

(试卷Ⅲ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $y = \ln(1 + ax)$,其中 a 为非零常数,则 $y' =$ ______,$y'' =$ ______.

(2) 曲线 $y = \arctan x$ 在横坐标为 1 的点处的切线方程是______;法线方程是______.

(3) 积分中值定理的条件是______,结论是______.

(4) $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^n =$ ______.

(5) $\int f'(x)\,\mathrm{d}x =$ ______,$\int_a^b f'(2x)\,\mathrm{d}x =$ ______.

二、(本题满分 6 分)

求极限 $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right)$.

三、(本题满分 7 分)

设 $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

四、(本题满分 8 分)

计算定积分 $\int_0^1 x\arcsin x\,\mathrm{d}x$.

五、(本题满分 8 分)

设 D 是由曲线 $y = \sin x + 1$ 与三条直线 $x = 0, x = \pi, y = 0$ 围成的曲边梯形,求 D 绕 Ox 轴旋转一周所生成的旋转体的体积.

六、证明题(本题满分 10 分)

(1) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导,且导数 $f'(x)$ 恒大于零,则 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加.

(2) 若 $g(x)$ 在 $x = c$ 处二阶导数存在,且 $g'(c) = 0, g''(c) < 0$,则 $g(c)$ 为 $g(x)$ 的一个极大值.

七、(本题满分 10 分)

计算不定积分 $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$,其中 a,b 是不全为 0 的非负常数.

八、(本题满分 10 分)

(1) 求微分方程 $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x-y$ 满足条件 $y\big|_{x=\sqrt{2}}=0$ 的特解.

(2) 求微分方程 $y''+2y'+y=xe^{x}$ 的通解.

九、选择题(本题共 4 小题,每小题 4 分,满分 16 分)

(1) $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}(-\infty<x<+\infty)$ 是(　　)

(A) 有界函数.　　(B) 单调函数.

(C) 周期函数.　　(D) 偶函数.

(2) 函数 $f(x)=x\sin x$(　　)

(A) 当 $x\to\infty$ 时为无穷大.　　(B) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

(C) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.　　(D) 当 $x\to\infty$ 时有有限极限.

(3) 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导,则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(a+x)-f(a-x)}{x}$ 等于(　　)

(A) $f'(a)$.　　(B) $2f'(a)$.

(C) 0.　　(D) $f'(2a)$.

(4) 设 $I=t\int_0^{\frac{s}{t}}f(tx)\mathrm{d}x$,其中 $f(x)$ 连续,$s>0,t>0$,则 I 的值(　　)

(A) 依赖于 s,t.　　(B) 依赖于 s,t,x.

(C) 依赖于 t,x,不依赖于 s.　　(D) 依赖于 s,不依赖于 t.

十、(本题满分 10 分)

在第一象限内求曲线 $y=-x^2+1$ 上的一点,使该点处的切线与所给曲线及两坐标轴所围成的图形面积为最小,并求此最小面积.

1988 年全国硕士研究生招生考试试题

(试卷 Ⅲ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 4 分,满分 20 分)

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}2x+a, & x\leqslant 0,\\ e^x(\sin x+\cos x), & x>0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,则 $a=$ ______.

(2) 设 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty} t\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2tx}$,则 $f'(t)=$ ______.

(3) 设 $f(x)$ 连续,且 $\int_0^{x^3-1} f(t)\,\mathrm{d}t=x$,则 $f(7)=$ ______.

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}=$ ______.

(5) $\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=$ ______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 4 分,满分 20 分)

(1) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+6x+1$ 的图形在点 $(0,1)$ 处的切线与 x 轴交点的坐标是(　　)

(A) $\left(-\dfrac{1}{6},0\right)$.　　(B) $-1,0)$.

(C) $\left(\dfrac{1}{6},0\right)$.　　(D) $(1,0)$.

(2) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上皆可导,且 $f(x)<g(x)$,则必有(　　)

(A) $f(-x)>g(-x)$.　　(B) $f'(x)<g'(x)$.

(C) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.　　(D) $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t<\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

(3) 若函数 $y=f(x)$,有 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$,则当 $\Delta x\to 0$ 时,该函数在 $x=x_0$ 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是(　　)

(A) 与 Δx 等价的无穷小.　　(B) 与 Δx 同阶的无穷小.

(C) 比 Δx 低阶的无穷小.　　(D) 比 Δx 高阶的无穷小.

(4) 由曲线 $y=\sin^{\frac{3}{2}}x\,(0\leqslant x\leqslant \pi)$ 与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为(　　)

(A) $\dfrac{4}{3}$.　　(B) $\dfrac{4}{3}\pi$.

(C) $\dfrac{2}{3}\pi^2$.　　(D) $\dfrac{2}{3}\pi$.

(5) 设函数 $y=f(x)$ 是微分方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解,且 $f(x_0)>0$, $f'(x_0)=0$,则 $f(x)$ 在点 x_0 处(　　)

(A) 有极大值.　　(B) 有极小值.

(C) 某邻域内单调增加.　　(D) 某邻域内单调减少.

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1) 已知 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

(2) 已知 $y=1+xe^{xy}$,求 $y'\big|_{x=0}$, $y''\big|_{x=0}$.

(3) 求微分方程 $y'+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{1}{x(x^2+1)}$ 的通解(一般解).

四、(本题满分 12 分)

作函数 $y=\dfrac{6}{x^2-2x+4}$ 的图形,并填写下表.

单调增加区间	
单调减少区间	
极值点	
极值	
凹(∪)区间	
凸(∩)区间	
拐点	
渐近线	

五、(本题满分 8 分)

将长为 a 的一段铁丝截成两段,一段围成正方形,另一段围成圆形,问这两段铁丝各长为多少时,正方形与圆形的面积之和为最小?

六、(本题满分 10 分)

设函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y''-3y'+2y=2e^x$,且其图形在点(0,1)处的切线与曲线 $y=x^2-x+1$ 在该点处的切线重合,求函数 $y=y(x)$.

七、(本题满分 7 分)

设 $x\geqslant -1$,求 $\int_{-1}^{x}(1-|t|)\,dt$.

八、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续导数,且 $m\leqslant f(x)\leqslant M$.

(1) 求 $\lim\limits_{a\to 0^+}\dfrac{1}{4a^2}\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]\,dt$;

(2) 证明: $\left|\dfrac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(t)\,dt-f(x)\right|\leqslant M-m\ (a>0)$.

1989 年全国硕士研究生招生考试试题

(试卷 Ⅲ)

一、填空题(本题共 7 小题,每小题 3 分,满分 21 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x\cot 2x =$ ______.

(2) $\int_0^{\pi} t\sin t\mathrm{d}t =$ ______.

(3) 曲线 $y = \int_0^x (t-1)(t-2)\mathrm{d}t$ 在点$(0,0)$处的切线方程是______.

(4) 设$f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$,则$f'(0) =$ ______.

(5) 设$f(x)$是连续函数,且$f(x) = x + 2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$,则$f(x) =$ ______.

(6) 设$f(x) = \begin{cases} a + bx^2, & x \leqslant 0, \\ \dfrac{\sin bx}{x}, & x > 0 \end{cases}$在 $x = 0$ 处连续,则常数 a 与 b 应满足的关系是______.

(7) 设 $\tan y = x + y$,则 $\mathrm{d}y =$ ______.

二、(本题共 5 小题,每小题 4 分,满分 20 分)

(1) 已知 $y = \arcsin \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$,求 y'.

(2) 求$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}$.

(3) 求$\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$.

(4) 已知$\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = \arctan t, \end{cases}$ 求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(5) 已知$f(2) = \dfrac{1}{2}$, $f'(2) = 0$ 及$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 1$,求$\int_0^1 x^2 f''(2x)\mathrm{d}x$.

三、选择题(本题共 6 小题,每小题 3 分,满分 18 分)

(1) 当 $x > 0$ 时,曲线 $y = x\sin\dfrac{1}{x}$(　　)

(A) 有且仅有水平渐近线.　　(B) 有且仅有铅直渐近线.

(C) 既有水平渐近线,也有铅直渐近线.　　(D) 既无水平渐近线,也无铅直渐近线.

(2) 若 $3a^2 - 5b < 0$,则方程 $x^5 + 2ax^3 + 3bx + 4c = 0$(　　)

(A) 无实根.　　(B) 有唯一实根.

(C) 有三个不同实根.　　(D) 有五个不同实根.

(3) 曲线$y = \cos x\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$与$x$轴所围成的图形,绕$x$轴旋转一周所成的旋转体的体积为(　　)

(A) $\dfrac{\pi}{2}$.　　(B) π.　　(C) $\dfrac{\pi^2}{2}$.　　(D) π^2.

(4) 设两函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $x=a$ 处取得极大值,则函数 $F(x)=f(x)g(x)$ 在 $x=a$ 处(　　)

(A) 必取极大值.　　(B) 必取极小值.

(C) 不可能取极值.　　(D) 是否取极值不能确定.

(5) 微分方程 $y''-y=e^x+1$ 的一个特解应具有形式(式中 a,b 为常数)(　　)

(A) ae^x+b.　　(B) axe^x+b.　　(C) ae^x+bx.　　(D) axe^x+bx.

(6) 设 $f(x)$ 在点 $x=a$ 的某个邻域内有定义,则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是(　　)

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)\right]$ 存在.　　(B) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在.

(C) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在.　　(D) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在.

四、(本题满分 6 分)

求微分方程 $xy'+(1-x)y=e^{2x}\ (0<x<+\infty)$ 满足 $y(1)=0$ 的特解.

五、(本题满分 7 分)

设 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)\,dt$,其中 f 为连续函数,求 $f(x)$.

六、(本题满分 7 分)

证明方程 $\ln x=\frac{x}{e}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个不同实根.

七、(本题满分 11 分)

对函数 $y=\frac{x+1}{x^2}$ 填写下表.

单调减少区间	
单调增加区间	
极值点	
极值	
凹区间	
凸区间	
拐点	
渐近线	

八、(本题满分 10 分)

设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过原点,当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时,$y\geqslant0$. 又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$. 试确定 a,b,c 的值,使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

1990 年全国硕士研究生招生考试试题

(试卷 Ⅲ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 曲线$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t \end{cases}$上对应于 $t = \dfrac{\pi}{6}$ 处的法线方程是______.

(2) 设 $y = e^{\tan\frac{1}{x}} \sin \dfrac{1}{x}$,则 $y' =$ ______.

(3) $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx =$ ______.

(4) 下列两个积分的大小关系是:$\int_{-2}^{-1} e^{-x^3} dx$ ______ $\int_{-2}^{-1} e^{x^3} dx$.

(5) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$则函数 $f[f(x)] =$ ______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1} - ax - b\right) = 0$,其中 a,b 是常 ,则( )

(A) $a = 1, b = 1$. (B) $a = -1, b = 1$.

(C) $a = 1, b = -1$. (D) $a = -1, b = -1$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续,则 $d\left[\int f(x)\,dx\right]$ 等于( )

(A) $f(x)$. (B) $f(x)\,dx$. (C) $f(x) + C$. (D) $f'(x)\,dx$.

(3) 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数,且 $f'(x) = [f(x)]^2$,则当 n 为大于 2 的正整数时,$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是( )

(A) $n![f(x)]^{n+1}$. (B) $n[f(x)]^{n+1}$. (C) $[f(x)]^{2n}$. (D) $n![f(x)]^{2n}$.

(4) 设 $f(x)$ 是连续函数,且 $F(x) = \int_x^{e^{-x}} f(t)\,dt$,则 $F'(x)$ 等于( )

(A) $-e^{-x} f(e^{-x}) - f(x)$. (B) $-e^{-x} f(e^{-x}) + f(x)$.

(C) $e^{-x} f(e^{-x}) - f(x)$. (D) $e^{-x} f(e^{-x}) + f(x)$.

(5) 设 $F(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \\ f(0), & x = 0, \end{cases}$其中 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导,$f'(0) \neq 0$,$f(0) = 0$,则 $x = 0$ 是 $F(x)$ 的( )

(A) 连续点. (B) 第一类间断点.

(C) 第二类间断点. (D) 连续点或间断点不能由此确定.

三、(本题共 5 小题,每小题 5 分,满分 25 分)

(1) 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x = 9$,求常 a.

(2) 求由方程 $2y - x =$ dy.

(3) 求曲线 $y=\dfrac{1}{1+x^2}(x>0)$ 的拐点.

(4) 计算 $\displaystyle\int\frac{\ln x}{(1-x)^2}\mathrm{d}x$.

(5) 求微分方程 $x\ln x\mathrm{d}y+(y-\ln x)\mathrm{d}x=0$ 满足条件 $y\big|_{x=\mathrm{e}}=1$ 的特解.

四、(本题满分 9 分)

在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的第一象限部分上求一点 P,使该点处的切线,椭圆及两坐标轴所围图形面积为最小(其中 $a>0,b>0$).

五、(本题满分 9 分)

证明:当 $x>0$ 时,有不等式 $\arctan x+\dfrac{1}{x}>\dfrac{\pi}{2}$.

六、(本题满分 9 分)

设 $f(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t$,其中 $x>0$,求 $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

七、(本题满分 9 分)

过点 $P(1,0)$ 作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线,该切线与上述抛物线及 x 轴围成一平面图形. 求此平面图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

八、(本题满分 9 分)

求微分方程 $y''+4y'+4y=\mathrm{e}^{ax}$ 的通解,其中 a 为实数.

1991 年全国硕士研究生招生考试试题

（试卷 Ⅲ）

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

(1) 设 $y = \ln(1+3^{-x})$，则 $\mathrm{d}y =$ ______.

(2) 曲线 $y = \mathrm{e}^{-x^2}$ 的凸区间是______.

(3) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x =$ ______.

(4) 质点以速度 $t\sin(t^2)$ 米/秒作直线运动，则从时刻 $t_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 秒到 $t_2 = \sqrt{\pi}$ 秒内质点所经过的路程等于______米.

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} =$ ______.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

(1) 若曲线 $y = x^2 + ax + b$ 和 $2y = -1 + xy^3$ 在点 $(1,-1)$ 处相切，其中 a, b 是常数，则（　　）

(A) $a = 0, b = -2$.　　(B) $a = 1, b = -3$.

(C) $a = -3, b = 1$.　　(D) $a = -1, b = -1$.

(2) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2 - x, & 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$ 记 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t, 0 \leqslant x \leqslant 2$，则（　　）

(A) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{1}{3} + 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$

(B) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -\frac{7}{6} + 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$

(C) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$

(D) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义，$x_0 \neq 0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点，则（　　）

(A) x_0 必是 $f(x)$ 的驻点.　　(B) $-x_0$ 必是 $-f(-x)$ 的极小值点.

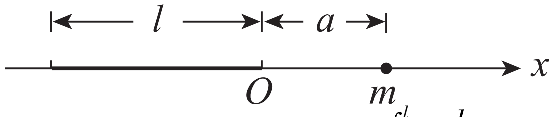
(C) $-x_0$ 必是 $-f(x)$ 的极小值点.　　(D) 对一切 x 都有 $f(x) \leqslant f(x_0)$.

(4) 曲线 $y = \frac{1+\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}$（　　）

(A) 没有渐近线.　　(B) 仅有水平渐近线.

(C) 仅有铅直渐近线.　　(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线.

(5) 如图，x 轴上有一线密度为常数 μ，长度为 l 的细杆，若质量为 m 的质点到杆右端的距离为 a，已知引力系数为 k，则质点和细杆之间引力的大小为（　　）



(A) $\int_{-l}^{0}\frac{km\mu}{(a-x)^2}\mathrm{d}x$.　　(B) $\int_{0}^{l}\frac{km\mu}{(a-x)^2}\mathrm{d}x$.

(C) $2\int_{-\frac{l}{2}}^{0}\frac{km\mu}{(a+x)^2}\mathrm{d}x$.　　(D) $2\int_{0}^{\frac{l}{2}}\frac{km\mu}{(a+x)^2}\mathrm{d}x$.

三、(本题共 5 小题,每小题 5 分,满分 25 分)

(1) 设$\begin{cases}x=t\cos t,\\ y=t\sin t,\end{cases}$求$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(2) 计算$\int_1^4\frac{\mathrm{d}x}{x(1+\sqrt{x})}$.

(3) 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2(\mathrm{e}^x-1)}$.

(4) 求$\int x\sin^2x\mathrm{d}x$.

(5) 求微分方程 $xy'+y=x\mathrm{e}^x$ 满足 $y(1)=1$ 的特解.

四、(本题满分 9 分)

利用导数证明:当 $x>1$ 时,$\frac{\ln(1+x)}{\ln x}>\frac{x}{1+x}$.

五、(本题满分 9 分)

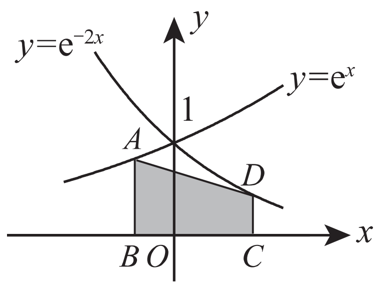
求微分方程 $y''+y=x+\cos x$ 的通解.

六、(本题满分 9 分)

曲线 $y=(x-1)(x-2)$ 和 x 轴围成一平面图形,求此平面图形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积.

七、(本题满分 9 分)

如图,A 和 D 分别是曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 和 $y=\mathrm{e}^{-2x}$ 上的点,AB 和 DC 均垂直 x 轴,且 $|AB|:|DC|=2:1$, $|AB|<1$,求点 B 和 C 的横坐标,使梯形 $ABCD$ 的面积最大.



八、(本题满分 9 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 $f(x)=f(x-\pi)+\sin x$,且 $f(x)=x, x\in[0,\pi)$. 计算 $\int_{\pi}^{3\pi}f(x)\mathrm{d}x$.

1992 年全国硕士研究生招生考试试题

(试卷 Ⅲ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设$\begin{cases} x=f(t)-\pi, \\ y=f(e^{3t}-1), \end{cases}$其中$f$可导,且$f'(0)\neq 0$,则$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=$______.

(2) 函数 $y=x+2\cos x$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为______.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}=$______.

(4) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x^2+1)}=$______.

(5) 由曲线 $y=xe^x$ 与直线 $y=ex$ 所围成的图形的面积 $S=$______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 当 $x\to 0$ 时,$x-\sin x$ 是 x^2 的(　　)

(A) 低阶无穷小.　　(B) 高阶无穷小.

(C) 等价无穷小.　　(D) 同阶但非等价的无穷小.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 0, \\ x^2+x, & x>0, \end{cases}$ 则(

(A) $f(-x)=\begin{cases} -x^2, & x\leqslant 0, \\ -(x^2+x), & x>0. \end{cases}$　　(B) $f(-x)=\begin{cases} -(x^2+x), & x<0, \\ -x^2, & x\geqslant 0. \end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 0, \\ x^2-x, & x>0. \end{cases}$　　(D) $f(-x)=\begin{cases} x^2-x, & x<0, \\ x^2, & x\geqslant 0. \end{cases}$

(3) 当 $x\to 1$ 时,函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限(　　)

(A) 等于 2.　　(B) 等于 0.

(C) 为 ∞.　　(D) 不存在但不为 ∞.

(4) 设 $f(x)$ 连续,$F(x)=\displaystyle\int_0^{x^2}f(t^2)\,dt$,则 $F'(x)$ 等于(　　)

(A) $f(x^4)$.　　(B) $x^2f(x^4)$.　　(C) $2xf(x^4)$.　　(D) $2xf(x^2)$.

(5) 若 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$,则 $f(x)$ 有一个原函数为(　　)

(A) $1+\sin x$.　　(B) $1-\sin x$.　　(C) $1+\cos x$.　　(D) $1-\cos x$.

三、(本题共 5 小题,每小题 5 分,满分 25 分)

(1) 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^y=1$ 所确定,求$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|$ 的值.

(3) 求$\int \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

(4) 求$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}\mathrm{d}x$.

(5) 求微分方程$(y-x^3)\mathrm{d}x-2x\mathrm{d}y=0$的通解.

四、(本题满分 9 分)

设$f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^{-x}, & x>0,\end{cases}$求$\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x$.

五、(本题满分 9 分)

求微分方程$y''-3y'+2y=x\mathrm{e}^x$的通解.

六、(本题满分 9 分)

计算曲线$y=\ln(1-x^2)$上相应于$0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2}$的一段弧的长度.

七、(本题满分 9 分)

求曲线$y=\sqrt{x}$的一条切线l,使该曲线与切线l及直线$x=0,x=2$所围成的平面图形面积最小.

八、(本题满分 9 分)

已知$f''(x)<0$, $f(0)=0$,证明对任何$x_1>0,x_2>0$,有$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

1993 年全国硕士研究生招生考试试题

(试卷 Ⅲ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x =$ ______.

(2) 函数 $y = y(x)$ 由方程 $\sin(x^2 + y^2) + e^x - xy^2 = 0$ 所确定,则$\dfrac{dy}{dx} =$ ______.

(3) 设 $F(x) = \int_1^x \left(2 - \dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)dt\ (x > 0)$,则函数 $F(x)$ 的单调减少区间是______.

(4) $\int \dfrac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}dx =$ ______.

(5) 已知曲线 $y = f(x)$ 过点 $\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$,且其上任一点$(x,y)$处的切线斜率为 $x\ln(1 + x^2)$,则$f(x)$

$=$ ______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 当 $x \to 0$ 时,变量$\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$是(　　)

(A) 无穷小.　　(B) 无穷大.

(C) 有界的,但不是无穷小.　　(D) 无界的,但不是无穷大.

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2 - 1|}{x - 1}, & x \neq 1, \\ 2, & x = 1, \end{cases}$ 则在点 $x = 1$ 处函数 $f(x)$(　　)

(A) 不连续.　　(B) 连续,但不可导.

(C) 可导,但导数不连续.　　(D) 可导,且导数连续.

(3) 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & 1 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases}$ 设 $F(x) = \int_1^x f(t)dt\ (0 \leqslant x \leqslant 2)$,则 $F(x)$ 为(　　)

(A) $\begin{cases} \dfrac{1}{3}x^3, & 0 \leqslant x < 1, \\ x, & 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$　　(B) $\begin{cases} \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{3}, & 0 \leqslant x < 1, \\ x, & 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$

(C) $\begin{cases} \dfrac{1}{3}x^3, & 0 \leqslant x < 1, \\ x - 1, & 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$　　(D) $\begin{cases} \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{3}, & 0 \leqslant x < 1, \\ x - 1, & 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$

(4) 设常数 $k > 0$,函数 $f(x) = \ln x - \dfrac{x}{e} + k$ 在$(0, +\infty)$内的零点个数为(　　)

(A) 3.　　(B) 2.　　(C) 1.　　(D) 0.

(5) 若 $f(x) = -f(-x)$,在$(0, +\infty)$内 $f'(x) > 0, f''(x) > 0$,则$f(x)$在$(-\infty, 0)$内(　　)

(A) $f'(x) < 0, f''(x) < 0$.　　(B) $f'(x) < 0, f''(x) > 0$.

(C) $f'(x) > 0, f''($ … > 0.

三、(本题共5小题,每小题5分,满分25分)

(1) 设 $y=\sin[f(x^2)]$,其中 f 具有二阶导数,求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

(2) 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$.

(3) 求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\cos 2x}dx$.

(4) 求 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^3}dx$.

(5) 求微分方程 $(x^2-1)dy+(2xy-\cos x)dx=0$ 满足初值条件 $y(0)=1$ 的特解.

四、(本题满分9分)

设二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^x$ 的一个特解为 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$,试确定常数 α,β,γ,并求该方程的通解.

五、(本题满分9分)

设平面图形 A 由 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 与 $y\geqslant x$ 所确定,求图形 A 绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

六、(本题满分9分)

作半径为 r 的球的外切正圆锥,问此圆锥的高 h 为何值时,其体积 V 最小,并求出该最小值.

七、(本题满分9分)

设 $x>0$,常数 $a>e$. 证明:$(a+x)^a<a^{a+x}$.

八、(本题满分9分)

设 $f'(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续,且 $f(0)=0$,证明:$\left|\int_0^a f(x)dx\right|\leqslant\frac{Ma^2}{2}$,其中 $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant a}|f'(x)|$.

1994 年全国硕士研究生招生考试试题

(试卷 Ⅲ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,则 $a=$ ______.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t),\\ y=t^3+t^2\end{cases}$ 所确定,则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$ ______.

(3) $\dfrac{d}{dx}\left(\int_0^{\cos 3x}f(t)dt\right)=$ ______.

(4) $\int x^3e^{x^2}dx=$ ______.

(5) 微分方程 $ydx+(x^2-4x)dy=0$ 的通解为______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$,则(　　)

(A) $a=1,b=-\dfrac{5}{2}$.　　(B) $a=0,b=-2$.

(C) $a=0,b=-\dfrac{5}{2}$.　　(D) $a=1,b=-2$.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, & x\leqslant 1,\\ x^2, & x>1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的(　　)

(A) 左、右导数都存在.　　(B) 左导数存在,但右导数不存在.

(C) 左导数不存在,但右导数存在.　　(D) 左、右导数都不存在.

(3) 设 $y=f(x)$ 是满足微分方程 $y''+y'-e^{\sin x}=0$ 的解,且 $f'(x_0)=0$,则 $f(x)$ 在(　　)

(A) x_0 的某个邻域内单调增加.　　(B) x_0 的某个邻域内单调减少.

(C) x_0 处取得极小值.　　(D) x_0 处取得极大值.

(4) 曲线 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 的渐近线有(　　)

(A) 1 条.　　(B) 2 条.　　(C) 3 条.　　(D) 4 条.

(5) 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}\cos^4x\,dx$, $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3x+\cos^4x)dx$, $P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3x-\cos^4x)dx$,则有(　　)

(A) $N<P<M$.　　(B) $M<P<N$.

(C) $N<M<P$.　　(D) $P<M<N$.

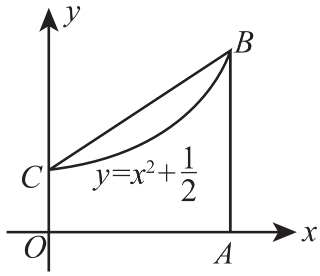
三、(本题共 5 小题,每小题 5 分,满分 25 分)

(1) 设 $y=f(x+y)$,其中 f 具有二阶导数,且其一阶导数不等于 1,求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(2) 计算 $\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}dx$.

(3) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)$.

(4) 计算 $\int\dfrac{dx}{\sin 2x+2\sin x}$.



(5) 如图,设曲线方程为 $y=x^2+\dfrac{1}{2}$,梯形 $OABC$ 的面积为 D,曲边梯形 $OABC$ 的面积为 D_1,点 A 的坐标为 $(a,0)$,$a>0$. 证明:$\dfrac{D}{D_1}<\dfrac{3}{2}$.

四、(本题满分 9 分)

设当 $x>0$ 时,方程 $kx+\dfrac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个解,求 k 的取值范围.

五、(本题满分 9 分)

设 $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$,

(1) 求函数的增减区间及极值;
(2) 求函数图形的凹凸区间及拐点;
(3) 求其渐近线;
(4) 作出其图形.

六、(本题满分 9 分)

求微分方程 $y''+a^2y=\sin x$ 的通解,其中常数 $a>0$.

七、(本题满分 9 分)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且递减,证明:当 $0<\lambda<1$ 时,$\int_0^\lambda f(x)dx\geqslant\lambda\int_0^1 f(x)dx$.

八、(本题满分 9 分)

求曲线 $y=3-|x^2-1|$ 与 x 轴围成的封闭图形绕直线 $y=3$ 旋转所得的旋转体体积.

1995 年全国硕士研究生招生考试试题

（试卷 Ⅲ）

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

（1）设 $y = \cos(x^2)\sin^2\dfrac{1}{x}$，则 $y' =$ ______.

（2）微分方程 $y'' + y = -2x$ 的通解为______.

（3）曲线 $\begin{cases} x = 1 + t^2, \\ y = t^3 \end{cases}$ 在 $t = 2$ 处的切线方程为______.

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1} + \dfrac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n+n}\right) =$ ______.

（5）曲线 $y = x^2 e^{-x^2}$ 的渐近线方程为______.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

（1）设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义，$f(x)$ 为连续函数，且 $f(x) \neq 0$，$\varphi(x)$ 有间断点，则（　　）

（A）$\varphi[f(x)]$ 必有间断点.　　（B）$[\varphi(x)]^2$ 必有间断点.

（C）$f[\varphi(x)]$ 必有间断点.　　（D）$\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.

（2）曲线 $y = x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴所围图形的面积可表示为（　　）

（A）$-\int_0^2 x(x-1)(2-x)\,dx$.

（B）$\int_0^1 x(x-1)(2-x)\,dx - \int_1^2 x(x-1)(2-x)\,dx$.

（C）$-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\,dx + \int_1^2 x(x-1)(2-x)\,dx$.

（D）$\int_0^2 x(x-1)(2-x)\,dx$.

（3）设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导，且对任意 x_1, x_2，当 $x_1 > x_2$ 时，都有 $f(x_1) > f(x_2)$，则（　　）

（A）对任意 x，$f'(x) > 0$.　　（B）对任意 x，$f'(-x) \leqslant 0$.

（C）函数 $f(-x)$ 单调增加.　　（D）函数 $-f(-x)$ 单调增加.

（4）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 $f''(x) > 0$，则 $f'(1)$，$f'(0)$，$f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是（　　）

（A）$f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0)$.　　（B）$f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$.

（C）$f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0)$.　　（D）$f'(1) > f(0) - f(1) > f'(0)$.

（5）设 $f(x)$ 可导，$F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$. 若 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导，则必有（　　）

（A）$f(0) = 0$.　　（B）$f'(0) = 0$.

（C）$f(0) + f'(0) = 0$.　　（D）$f(0) - f'(0) = 0$.

三、(本题共 6 小题,每小题 5 分,满分 30 分)

(1) 求$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y$ 确定,其中 f 具有二阶导数,且 $f'\neq1$,求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(3) 设 $f(x^2-1)=\ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$,且 $f[\varphi(x)]=\ln x$,求$\int\varphi(x)dx$.

(4) 设 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{x^2}, & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 试讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

(5) 求摆线$\begin{cases}x=1-\cos t,\\ y=t-\sin t\end{cases}$一拱$(0\leqslant t\leqslant2\pi)$的弧长 S.

(6) 设单位质点在水平面内作直线运动,初速度 $v\big|_{t=0}=v_0$. 已知阻力与速度成正比(比例常数为 1),问 t 为多少时此质点的速度为$\dfrac{v_0}{3}$?并求到此时刻该质点所经过的路程.

四、(本题满分 8 分)

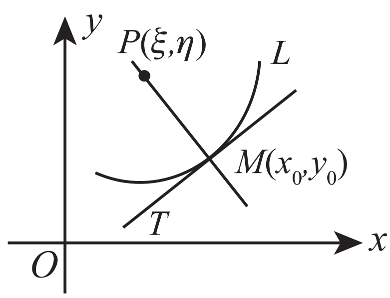
求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$ 的最大值和最小值.

五、(本题满分 8 分)

设 $y=e^x$ 是微分方程 $xy'+p(x)y=x$ 的一个解,求此微分方程满足条件 $y\big|_{x=\ln2}=0$ 的特解.

六、(本题满分 8 分)

如图,设曲线 L 的方程为 $y=f(x)$,且 $y''>0$. 又 MT,MP 分别为该曲线在点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线和法线. 已知线段 MP 的长度为$\dfrac{(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_0''}$(其中 $y_0'=y'(x_0)$,$y_0''=y''(x_0)$),试推导出点 $P(\xi,\eta)$ 的坐标表达式.



七、(本题满分 8 分)

设 $f(x)=\int_0^x\dfrac{\sin t}{\pi-t}dt$,计算$\int_0^\pi f(x)dx$.

八、(本题满分 8 分)

设$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$,且 $f''(x)>0$,证明 $f(x)\geqslant x$.

1996 年全国硕士研究生招生考试试题

（试卷 Ⅲ）

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $y = (x + e^{-\frac{x}{2}})^{\frac{2}{3}}$,则 $y'\Big|_{x=0} =$ ______.

(2) $\int_{-1}^{1}(x + \sqrt{1 - x^2})^2 dx =$ ______.

(3) 微分方程 $y'' + 2y' + 5y = 0$ 的通解为______.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\sin\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right) - \sin\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] =$ ______.

(5) 由曲线 $y = x + \frac{1}{x}$,$x = 2$ 及 $y = 2$ 所围图形的面积 $S =$ ______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设当 $x \to 0$ 时,$e^x - (ax^2 + bx + 1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小,则(　　)

(A) $a = \frac{1}{2}, b = 1$.　(B) $a = 1, b = 1$.　(C) $a = -\frac{1}{2}, b = -1$.　(D) $a = -1, b = 1$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 内有定义,若当 $x \in (-\delta,\delta)$ 时,恒有 $|f(x)| \leqslant x^2$,则 $x = 0$ 必是 $f(x)$ 的(　　)

(A) 间断点.　(B) 连续而不可导的点.

(C) 可导的点,且 $f'(0) = 0$.　(D) 可导的点,且 $f'(0) \neq 0$.

(3) 设 $f(x)$ 处处可导,则(　　)

(A) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$.

(B) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

(C) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$.

(D) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(4) 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内,方程 $|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x = 0$(　　)

(A) 无实根.　(B) 有且仅有一个实根.

(C) 有且仅有两个实根.　(D) 有无穷多个实根.

(5) 设 $f(x)$,$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且 $g(x) < f(x) < m$(m 为常数),由曲线 $y = g(x)$,$y = f(x)$,$x = a$ 及 $x = b$ 所围平面图形绕直线 $y = m$ 旋转而成的旋转体体积为(　　)

(A) $\int_a^b \pi[2m - f(x) + g(x)][f(x) - g(x)]dx$.

(B) $\int_a^b \pi[2m - f(x) - g(x)][f(x) - g(x)]dx$.

(C) $\int_a^b \pi[m - f(x) + g(x)][f(x) - g(x)]dx$.

(D) $\int_a^b \pi[m - f(x) - g(x)][f(x) - g(x)]dx$.

三、(本题共 6 小题,每小题 5 分,满分 30 分)

(1) 计算$\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}\,\mathrm{d}x$.

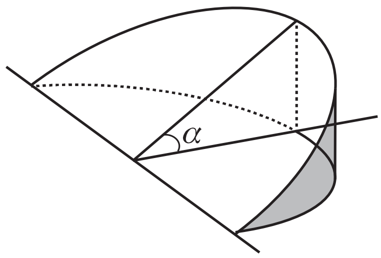
(2) 求$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$.

(3) 设$\begin{cases}x=\int_0^t f(u^2)\,\mathrm{d}u,\\ y=[f(t^2)]^2,\end{cases}$其中$f(u)$具有二阶导数,且$f(u)\neq 0$,求$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(4) 求函数$f(x)=\frac{1-x}{1+x}$在点$x=0$处带拉格朗日型余项的n阶泰勒展开式.

(5) 求微分方程$y''+y'=x^2$的通解.

(6) 设有一正椭圆柱体,其底面的长、短轴分别为$2a$,$2b$,用过此柱体底面的短轴且与底面成α角$\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$的平面截此柱体,得一楔形体(如图),求此楔形体的体积V.



四、(本题满分 8 分)

计算不定积分$\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

五、(本题满分 8 分)

设函数$f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1,\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 12x-16, & x>2.\end{cases}$

(1) 写出$f(x)$的反函数$g(x)$的表达式;

(2) $g(x)$是否有间断点、不可导点,若有,指出这些点.

六、(本题满分 8 分)

设函数$y=y(x)$由方程$2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$所确定,试求$y=y(x)$的驻点,并判别它是否为极值点.

七、(本题满分 8 分)

设$f(x)$在区间$[a,b]$上具有二阶导数,且$f(a)=f(b)=0$,$f'(a)f'(b)>0$.证明:存在$\xi\in(a,b)$和$\eta\in(a,b)$,使$f(\xi)=0$及$f''(\eta)=0$.

八、(本题满分 8 分)

设$f(x)$为连续函数,

(1) 求初值问题$\begin{cases}y'+ay=f(x),\\ y\big|_{x=0}=0\end{cases}$的解$y(x)$,其中$a$是正常数;

(2) 若$|f(x)|\leqslant k$(k为常数),证明:当$x\geqslant 0$时,有$|y(x)|\leqslant\frac{k}{a}(1-\mathrm{e}^{-ax})$.

1997 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{x^{-2}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$ ______.

(2) 设 $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$,则 $y''\Big|_{x=0}=$ ______.

(3) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}=$ ______.

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+8}=$ ______.

(5) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,1)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,t,0)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-4,5,-2)$ 的秩为 2,则 $t=$ ______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $x\to 0$ 时,$\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^{x}$ 与 x^n 是同阶无穷小,则 n 为(　　)

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

(2) 设在闭区间 $[a,b]$ 上 $f(x)>0$,$f'(x)<0$,$f''(x)>0$. 记 $S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,$S_2=f(b)(b-a)$,$S_3=\dfrac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$,则(　　)

(A) $S_1<S_2<S_3$.　　(B) $S_2<S_1<S_3$.　　(C) $S_3<S_1<S_2$.　　(D) $S_2<S_3<S_1$.

(3) 已知函数 $y=f(x)$ 对一切 x 满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-\mathrm{e}^{-x}$,若 $f'(x_0)=0(x_0\neq 0)$,则(　　)

(A) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值,$(x_0,f(x_0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(4) 设 $F(x)=\displaystyle\int_x^{x+2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t$,则 $F(x)$(　　)

(A) 为正常数.　　(B) 为负常数.　　(C) 恒为零.　　(D) 不为常数.

(5) 设函数 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]=$(　　)

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

三、(本题　6 小题,每小题 5 分,满分 30 分)

(1) 求极限 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{}}$.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\arctan t, \\ 2y-ty^2+e^t=5 \end{cases}$ 所确定,求 $\dfrac{dy}{dx}$.

(3) 计算 $\int e^{2x}(\tan x+1)^2 dx$.

(4) 求微分方程 $(3x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy)dy=0$ 的通解.

(5) 已知 $y_1=xe^x+e^{2x}$, $y_2=xe^x+e^{-x}$, $y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个解,求此微分方程.

(6) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,且 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵,求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

四、(本题满分 8 分)

λ 取何值时,方程组 $\begin{cases} 2x_1+\lambda x_2-x_3=1, \\ \lambda x_1-x_2+x_3=2, \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1 \end{cases}$ 无解,有唯一解或有无穷多解?并在有无穷多解时写出方程组的通解.

五、(本题满分 8 分)

设曲线 L 的极坐标方程为 $r=r(\theta)$, $M(r,\theta)$ 为 L 上任一点, $M_0(2,0)$ 为 L 上一定点. 若极径 OM_0, OM 与曲线 L 所围成的曲边扇形面积值等于 L 上 M_0, M 两点间弧长值的一半,求曲线 L 的方程.

六、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续,在开区间 $(0,1)$ 内大于零,并满足 $xf'(x)=f(x)+\dfrac{3a}{2}x^2$($a$ 为常数),又曲线 $y=f(x)$ 与 $x=1$, $y=0$ 所围的图形 S 的面积值为 2,求函数 $y=f(x)$,并问 a 为何值时,图形 S 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积最小.

七、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 连续, $\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$($A$ 为常数),求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

八、(本题满分 8 分)

就 k 的不同取值情况,确定方程 $x-\dfrac{\pi}{2}\sin x=k$ 在开区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内根的个数,并证明你的结论.

1998 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2} =$ ______.

(2) 曲线 $y=-x^3+x^2+2x$ 与 x 轴所围成的图形的面积 $A=$ ______.

(3) $\displaystyle\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x =$ ______.

(4) 设 $f(x)$ 连续,则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^x tf(x^2-t^2)\,\mathrm{d}t =$ ______.

(5) 曲线 $y=x\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x}\right)(x>0)$ 的渐近线方 为______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$,则下列断言正确的是(　　)

(A) 若 $\{x_n\}$ 发散,则 $\{y_n\}$ 必发散.

(B) 若 $\{x_n\}$ 无界,则 $\{y_n\}$ 必有界.

(C) 若 $\{x_n\}$ 有界,则 $\{y_n\}$ 必为无穷小.

(D) 若 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 为无穷小,则 $\{y_n\}$ 必为无穷小.

(2) 函数 $f(x)=(x^2-x-2)\,|x^3-x|$ 的不可导点的个数为(　　)

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

(3) 已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$,其中 α 是比 $\Delta x(\Delta x\to 0)$ 高阶的无穷小,且 $y(0)=\pi$,则 $y(1)=$(　　)

(A) $\pi \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$.　　(B) 2π.　　(C) π.　　(D) $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$.

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内连续,且 $f(a)$ 为其极大值,则存在 $\delta>0$,当 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 时,必有(　　)

(A) $(x-a)[f(x)-f(a)]\geqslant 0$.　　(B) $(x-a)[f(x)-f(a)]\leqslant 0$.

(C) $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\geqslant 0\ (x\neq a)$.　　(D) $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\leqslant 0\ (x\neq a)$.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是任一 $n(n\geqslant 3)$ 阶方阵,$\boldsymbol{A}^*$ 是其伴随矩阵,又 k 为常数,且 $k\neq 0,\pm 1$,则必有 $(k\boldsymbol{A})^*=$(　　)

(A) $k\boldsymbol{A}^*$.　　(B) $k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$.　　(C) $k^n\boldsymbol{A}^*$.　　(D) $k^{-1}\boldsymbol{A}^*$.

三、(本题满分 5 分)

求函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内的间断点,并判断其类型.

四、(本题满分 5 分)

确定常数 a,b,c 的值，使 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c(c\neq0)$.

五、(本题满分 5 分)

利用代换 $y=\dfrac{u}{\cos x}$ 将方程

$$y''\cos x-2y'\sin x+3y\cos x=\mathrm{e}^x$$

化简，并求出原方程的通解.

六、(本题满分 6 分)

计算积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}$.

七、(本题满分 6 分)

从船上向海中沉放某种探测仪器，按探测要求，需确定仪器的下沉深度 y(从海平面算起)与下沉速度 v 之间的函数关系. 设仪器在重力作用下，从海平面由静止开始垂直下沉，在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用. 设仪器的质量为 m，体积为 B，海水比重为 ρ，仪器所受的阻力与下沉速度成正比，比例系数为 $k(k>0)$. 试建立 y 与 v 所满足的微分方程，并求出函数关系式 $y=y(v)$.

八、(本题满分 8 分)

设 $y=f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的任一非负连续函数.

(1) 试证存在 $x_0\in(0,1)$，使得在区间 $[0,x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积，等于在区间 $[x_0,1]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积；

(2) 又设 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f'(x)>\dfrac{-2f(x)}{x}$，证明(1)中的 x_0 是惟一的.

九、(本题满分 8 分)

设有曲线 $y=\sqrt{x-1}$，过原点作其切线，求由此曲线、切线及 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的表面积.

十、(本题满分 8 分)

设 $y=y(x)$ 是一向上凸的连续曲线，其上任意一点 (x,y) 处的曲率为 $\dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$，且此曲线上点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=x+1$，求该曲线的方程，并求函数 $y=y(x)$ 的极值.

十一、(本题满分 8 分)

设 $x\in(0,1)$，证明：

(1) $(1+x)\ln^2(1+x)$

(2) $\frac{1}{\ln 2}-1<\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$.

十二、(本题满分 5 分)

设$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{-1}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 是 4 阶单位矩阵,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵,

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

求 $\boldsymbol{A}$.

十三、(本题满分 6 分)

已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,4,0,2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,7,1,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=(3,10,b,4)^{\mathrm{T}}$,问:

(1) a,b 取何值时,$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示?

(2) a,b 取何值时,$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示?并写出此表示式.

1999 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 曲线$\begin{cases} x = e^t \sin 2t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$在点(0,1)处的法线方程为______.

(2) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x$ 确定,则$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} =$ ______.

(3) $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2 - 6x + 13}dx =$ ______.

(4) 函数 $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ 在区间$\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$上的平均值为______.

(5) 微分方程 $y'' - 4y = e^{2x}$ 的通解为______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x > 0, \\ x^2 g(x), & x \leqslant 0, \end{cases}$其中 $g(x)$ 是有界函数,则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处(　　)

(A) 极限不存在.　　(B) 极限存在,但不连续.

(C) 连续,但不可导.　　(D) 可导.

(2) 设 $\alpha(x) = \displaystyle\int_0^{5x} \frac{\sin t}{t}dt$,$\beta(x) = \displaystyle\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt$,则当 $x \to 0$ 时,$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的(　　)

(A) 高阶无穷小.　　(B) 低阶无穷小.

(C) 同阶但不等价的无穷小.　　(D) 等价无穷小.

(3) 设 $f(x)$ 是连续函数,$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则(　　)

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时,$F(x)$ 必是偶函数.

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时,$F(x)$ 必是奇函数.

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时,$F(x)$ 必是周期函数.

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时,$F(x)$ 必是单调增函数.

(4) “对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$,总存在正整数 N,当 $n \geqslant N$ 时,恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$”是数列$\{x_n\}$收敛于 a 的(　　)

(A) 充分条件但非必要条件.　　(B) 必要条件但非充分条件.

(C) 充分必要条件.　　(D) 既非充分条件又非必要条件.

(5) 记行列式$\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$为 $f(x)$,则方程 $f(x) = 0$ 的根的个数为(　　)

(A)1.　　(B)2.　　(C)3.　　(D)4.

三、(本题满分 5 分)

求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

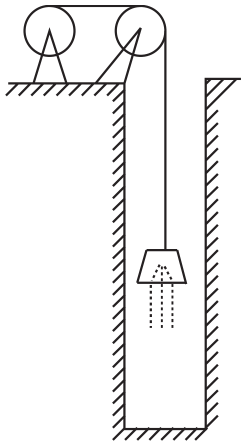
四、(本题满分 6 分)

计算$\int_1^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x$.

五、(本题满分 7 分)

求初值问题$\begin{cases}(y+\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0(x>0),\\ y\big|_{x=1}=0\end{cases}$的解.

六、(本题满分 7 分)



为清除井底的污泥,用缆绳将抓斗放入井底,抓起污泥后提出井口,已知井深 30m,抓斗自重 400N,缆绳每米重 50N,抓斗抓起的污泥重 2000N,提升速度为 3m/s. 在提升过程中,污泥以 20N/s 的速率从抓斗缝隙中漏掉. 现将抓起污泥的抓斗提升至井口,问克服重力需作多少焦耳的功?

(说明:①1N × 1m = 1J;m,N,s,J 分别表示米,牛顿,秒,焦耳. ② 抓斗的高度及位于井口上方的缆绳长度忽略不计.)

七、(本题满分 8 分)

已知函数$y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$,求

(1) 函数的增减区间及极值;

(2) 函数图形的凹凸区间及拐点;

(3) 函数图形的渐近线.

八、(本题满分 8 分)

设函数$f(x)$在闭区间$[-1,1]$上具有三阶连续导数,且$f(-1)=0$, $f(1)=1$, $f'(0)=0$,证明:在开区间$(-1,1)$内至少存在一点ξ,使$f'''(\xi)=3$.

九、(本题满分 8 分)

设函数$y(x)(x\geqslant0)$二阶可导,且$y'(x)>0$,$y(0)=1$. 过曲线$y=y(x)$上任意一点$P(x,y)$作该曲线的切线及x轴的垂线,上述两直线与x轴所围成的三角形的面积记为S_1,区间$[0,x]$上以$y=y(x)$为曲边的曲边梯形面积记为S_2,并设$2S_1-S_2$恒为 1,求此曲线$y=y(x)$的方程.

十、(本题满分 7 分)

设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数，$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

十一、(本题满分 6 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

十二、(本题满分 8 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-3,5,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,-1,p+2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(-2,-6,10,p)^{\mathrm{T}}$.

(1) p 为何值时，该向量组线性无关？并在此时将向量 $\boldsymbol{\alpha}=(4,1,6,10)^{\mathrm{T}}$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示；

(2) p 为何值时，该向量组线性相关？并在此时求出它的秩和一个极大线性无关组.

2000 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x - x}{\ln(1+2x^3)} =$ ______.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2^{xy}=x+y$ 所确定,则 $\mathrm{d}y\Big|_{x=0} =$ ______.

(3) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+7)\sqrt{x-2}} =$ ______.

(4) 曲线 $y=(2x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程为______.

(5) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 为 4 阶单位矩阵,且 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$,则 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1} =$ ______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+\mathrm{e}^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$,则常数 a,b 满足(　　)

(A) $a<0,b<0$.　　(B) $a>0,b>0$.

(C) $a\leqslant 0,b>0$.　　(D) $a\geqslant 0,b<0$.

(2) 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$,且 $f'(0)=0$,则(　　)

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) 点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值,点 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(3) 设函数 $f(x),g(x)$ 是大于零的可导函数,且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$,则当 $a<x<b$ 时,有(　　)

(A) $f(x)g(b)>f(b)g(x)$.　　(B) $f(x)g(a)>f(a)g(x)$.

(C) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$.　　(D) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$.

(4) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为(　　)

(A) 0.　　(B) 6.　　(C) 36.　　(D) ∞.

(5) 具有特解 $y_1=\mathrm{e}^{-x},y_2=2x\mathrm{e}^{-x},y_3=3\mathrm{e}^{x}$ 的 3 阶常系数齐次线性微分方程是(　　)

(A) $y'''-y''-y'+y=0$.　　(B) $y'''+y''-y'-y=0$.

(C) $y'''-6y''+11y'-6y=0$.　　(D) $y'''-2y''-y'+2y=0$.

三、(本题满分 5 分)

设 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$,计算 $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

四、(本题满分 5 分)

设 xOy 平面上有正方形 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 及直线 $l:x+y=t(t\geqslant 0)$. 若 $S(t)$ 表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积,试求 $\int_0^x S(t)\mathrm{d}t(x\geqslant 0)$.

五、(本题满分 5 分)

求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)(n\geqslant 3)$.

六、(本题满分 6 分)

设函数 $S(x)=\int_0^x|\cos t|\mathrm{d}t$,

(1) 当 n 为正整数,且 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时,证明:$2n\leqslant S(x)<2(n+1)$;

(2) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$.

七、(本题满分 7 分)

某湖泊的水量为 V,每年排入湖泊内含污染物 A 的污水量为 $\dfrac{V}{6}$,流入湖泊内不含 A 的水量为 $\dfrac{V}{6}$,流出湖泊的水量为 $\dfrac{V}{3}$. 已知 1999 年底湖中 A 的含量为 $5m_0$,超过国家规定指标. 为了治理污染,从 2000 年初起,限定排入湖泊中含 A 污水的浓度不超过 $\dfrac{m_0}{V}$. 问至多需经过多少年,湖泊中污染物 A 的含量才可降至 m_0 以内?(注:设湖水中 A 的浓度是均匀的).

八、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续,且 $\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$, $\int_0^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$. 试证明:在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2,使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

九、(本题满分 7 分)

已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数,它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x),$$

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x 高阶的无穷小,且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$ 处的切线方程.

十、(本题满分 8 分)

设曲线 $y=ax^2(a>0,x\geqslant 0)$ 与 $y=1-x^2$ 交于点 A,过坐标原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y=ax^2$ 围成一平面图形. 问 a 为何值时,该图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最大?最大体积是多少?

十一、(本题满分 8 分)

函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

(1) 求导数 $f'(x)$；

(2) 证明：当 $x\geqslant 0$ 时，不等式 $\mathrm{e}^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$ 成立.

十二、(本题满分 6 分)

设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置，求解方程

$$2\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma}.$$

十三、(本题满分 7 分)

已知向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}b\\1\\0\end{pmatrix}$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}9\\6\\-7\end{pmatrix}$ 具有相同的秩，且 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，求 a,b 的值.

2001 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2} =$ ______.

(2) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 所确定,则曲线 $y=f(x)$ 在点$(0,1)$处的法线方程为______.

(3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x\mathrm{d}x =$ ______.

(4) 过点 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ 且满足关系式 $y'\arcsin x+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1$ 的曲线方程为______.

(5) 设方程组 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 有无穷多解,则 $a=$ ______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $f(x)=\begin{cases} 1, & |x|\leqslant 1, \\ 0, & |x|>1, \end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于(　　)

(A)0.　　(B)1.　　(C) $\begin{cases} 1, & |x|\leqslant 1, \\ 0, & |x|>1. \end{cases}$　　(D) $\begin{cases} 0, & |x|\leqslant 1, \\ 1, & |x|>1. \end{cases}$

(2) 设当 $x\to 0$ 时,$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小,$x\sin x^n$ 是比 $e^{x^2}-1$ 高阶的无穷小,则正整数 n 等于(　　)

(A)1.　　(B)2.　　(C)3.　　(D)4.

(3) 曲线 $y=(x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点个数为(　　)

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

(4) 已知函数 $f(x)$ 在区间$(1-\delta,1+\delta)$内具有二阶导数,$f'(x)$ 严格单调减少,且 $f(1)=f'(1)=1$,则(　　)

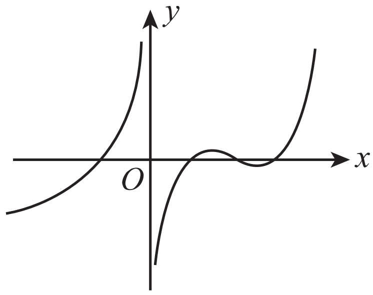
(A) 在$(1-\delta,1)$和$(1,1+\delta)$内均有 $f(x)<x$.

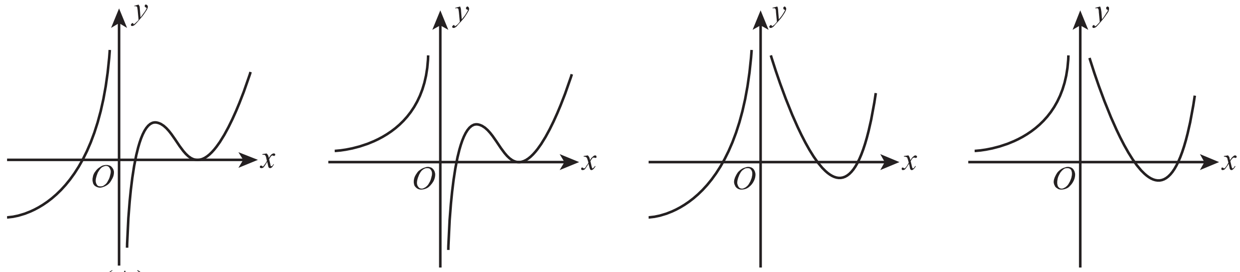
(B) 在$(1-\delta,1)$和$(1,1+\delta)$内均有 $f(x)>x$.

(C) 在$(1-\delta,1)$内,$f(x)<x$,在$(1,1+\delta)$内,$f(x)>x$.

(D) 在$(1-\delta,1)$内,$f(x)>x$,在$(1,1+\delta)$内,$f(x)<x$.

(5) 已知函数 $y=f(x)$ 在其定义域内可导,它的图形如右图所示,则其导函数 $y=f'(x)$ 的图形为(　　)





(A) (B) (C) (D)

三、(本题满分 6 分)

求$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

四、(本题满分 7 分)

求极限$\displaystyle\lim_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$,记此极限为$f(x)$,求函数$f(x)$的间断点并指出其类型.

五、(本题满分 7 分)

设$\rho=\rho(x)$是抛物线$y=\sqrt{x}$上任一点$M(x,y)(x\geqslant 1)$处的曲率半径,$s=s(x)$是该抛物线上介于点$A(1,1)$与M之间的弧长,计算$3\rho\dfrac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2}-\left(\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)^2$的值.

(在直角坐标系下曲率公式为$K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$.)

六、(本题满分 7 分)

设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上可导,$f(0)=0$,且其反函数为$g(x)$.若$\displaystyle\int_0^{f(x)}g(t)\mathrm{d}t=x^2\mathrm{e}^x$,求$f(x)$.

七、(本题满分 7 分)

设函数$f(x)$,$g(x)$满足$f'(x)=g(x)$,$g'(x)=2\mathrm{e}^x-f(x)$,且$f(0)=0$,$g(0)=2$,求$\displaystyle\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]\mathrm{d}x$.

八、(本题满分 9 分)

设L是一条平面曲线,其上任意一点$P(x,y)(x>0)$到坐标原点的距离恒等于该点处的切线在y轴上的截距,且L经过点$\left(\dfrac{1}{2},0\right)$.

(1) 试求 L 的方程;

(2) 求L位于第一象限部分的一条切线,使该切线与L以及两坐标轴所围图形的面积最小.

九、(本题满分 7 分)

一个半球体状的雪堆,其 [illegible] $K>0$. 假设在融化过程

中雪堆始终保持半球体状,已知半径为 r_0 的雪堆在开始融化的 3 小时内,融化了其体积的$\frac{7}{8}$,问雪堆全部融化需要多少小时?

十、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在区间 $[-a,a](a>0)$ 上具有二阶连续导数, $f(0)=0$.

(1) 写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式;

(2) 证明在 $[-a,a]$ 上至少存在一点 η,使 $a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$.

十一、(本题满分 6 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$,且矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AXA}+\boldsymbol{BXB}=\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{BXA}+\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵,求 $\boldsymbol{X}$.

十二、(本题满分 6 分)

已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,若 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+t\boldsymbol{\alpha}_4$, $\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4+t\boldsymbol{\alpha}_1$,讨论实数 t 满足什么关系时, $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

2002 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0,\\ ae^{2x}, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$______.

(2) 位于曲线 $y=xe^{-x}(0\leqslant x<+\infty)$ 下方,x 轴上方的无界图形的面积是______.

(3) 微分方程 $yy''+y'^2=0$ 满足初始条件 $y\Big|_{x=0}=1, y'\Big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$ 的特解是______.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1+\cos\dfrac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\dfrac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\dfrac{n\pi}{n}}\right)=$______.

(5) 矩阵 $\begin{pmatrix}0 & -2 & -2\\ 2 & 2 & -2\\ -2 & -2 & 2\end{pmatrix}$ 的非零特征值是______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设函数 $f(u)$ 可导,$y=f(x^2)$,当自变量 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时,相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1,则 $f'(1)=$ (　　)

(A) -1.　　(B) 0.1.　　(C) 1.　　(D) 0.5.

(2) 设函数 $f(x)$ 连续,则下列函数中,必为偶函数的是(　　)

(A) $\int_0^x f(t^2)\,dt$.　　(B) $\int_0^x f^2(t)\,dt$.

(C) $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\,dt$.　　(D) $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\,dt$.

(3) 设 $y=y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y''+py'+qy=e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解,则当 $x\to 0$ 时,函数 $\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限(　　)

(A) 不存在.　　(B) 等于 1.　　(C) 等于 2.　　(D) 等于 3.

(4) 设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导,则(　　)

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(C) 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$.

(D) 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$ 存在时,必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$.

(5) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,而向量 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,则对于任意常数 k,必有(　　)

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关.

三、(本题满分 6 分)

已知曲线的极坐标方程是 $r = 1 - \cos\theta$，求该曲线上对应于 $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ 处的切线与法线的直角坐标方程.

四、(本题满分 7 分)

设 $f(x) = \begin{cases} 2x + \dfrac{3}{2}x^2, & -1 \leqslant x < 0, \\ \dfrac{xe^x}{(e^x + 1)^2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$ 求函数 $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$ 的表达式.

五、(本题满分 7 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可导，$f(x) > 0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$，且满足

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{x}},$$

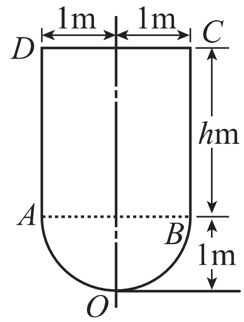
求 $f(x)$.

六、(本题满分 7 分)

求微分方程 $x\,dy + (x - 2y)\,dx = 0$ 的一个解 $y = y(x)$，使得由曲线 $y = y(x)$ 与直线 $x = 1, x = 2$ 以及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周的旋转体体积最小.

七、(本题满分 7 分)

某闸门的形状与大小如图所示，其中直线 l 为对称轴，闸门的上部为矩形 $ABCD$，下部由二次抛物线与线段 AB 所围成. 当水面与闸门的上端相平时，欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 $5:4$，闸门矩形部分的高 h 应为多少 m(米)?



八、(本题满分 8 分)

设 $0 < x_1 < 3$，$x_{n+1} = \sqrt{x_n(3 - x_n)}\ (n = 1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限.

九、(本题满分 8 分)

设 $0 < a < b$，证明不等式

$$\frac{2a}{a^2 + b^2} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

十、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内具有二阶连续导数，且 $f(0) \neq 0$，$f'(0) \neq 0$，$f''(0) \neq 0$. 证明：存在唯一的一组实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$，使得当 $h \to 0$ 时，$\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)$ 是比 h^2 高阶的无穷小.

十一、(本题满分 6 分)

已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵,且满足 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵.

(1) 证明:矩阵 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆;

(2) 若 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$,求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

十二、(本题满分 6 分)

已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 4 维列向量,其中 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$. 如果 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$,求线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

2003 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

(1) 若 $x \to 0$ 时,$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小,则 $a=$ ______.

(2) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $xy+2\ln x=y^4$ 所确定,则曲线 $y=f(x)$ 在点$(1,1)$处的切线方程是 ______.

(3) $y=2^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数是______.

(4) 设曲线的极坐标方程为 $\rho=\mathrm{e}^{a\theta}(a>0)$,则该曲线上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积为______.

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维列向量,$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置,若 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=$ ______.

(6) 设3阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为3阶单位矩阵,若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$,则 $|\boldsymbol{B}|=$ ______.

二、选择题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

(1) 设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$ 均为非负数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有(　　)

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立.　　(B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在.　　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

(2) 设 $a_n=\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x$,则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n$ 等于(　　)

(A) $(1+\mathrm{e})^{\frac{3}{2}}+1$.　　(B) $(1+\mathrm{e}^{-1})^{\frac{3}{2}}-1$.　　(C) $(1+\mathrm{e}^{-1})^{\frac{3}{2}}+1$.　　(D) $(1+\mathrm{e})^{\frac{3}{2}}-1$.

(3) 已知 $y=\dfrac{x}{\ln x}$ 是微分方程 $y'=\dfrac{y}{x}+\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 的解,则 $\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 的表达式为(　　)

(A) $-\dfrac{y^2}{x^2}$.　　(B) $\dfrac{y^2}{x^2}$.　　(C) $-\dfrac{x^2}{y^2}$.　　(D) $\dfrac{x^2}{y^2}$.

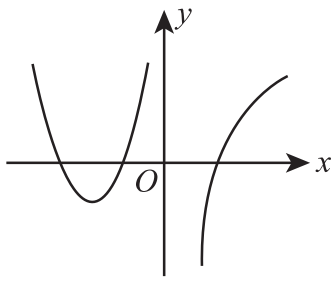
(4) 设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续,其导函数的图形如图所示,则 $f(x)$ 有(　　)

(A) 一个极小值点和两个极大值点.

(B) 两个极小值点和一个极大值点.

(C) 两个极小值点和两个极大值点.

(D) 三个极小值点和一个极大值点.



(5) 设 $I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x$,$I_2=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}\mathrm{d}x$,则(　　)

(A) $I_1>I_2>1$.　　(B) $1>I_1>I_2$.　　(C) $I_2>I_1>1$.　　(D) $1>I_2>I_1$.

(6) 设向量组 Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，则(　　)

(A) 当 $r < s$ 时，向量组 Ⅱ 必线性相关.

(B) 当 $r > s$ 时，向量组 Ⅱ 必线性相关.

(C) 当 $r < s$ 时，向量组 Ⅰ 必线性相关.

(D) 当 $r > s$ 时，向量组 Ⅰ 必线性相关.

三、(本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x}, & x < 0, \\ 6, & x = 0, \\ \dfrac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x\sin \dfrac{x}{4}}, & x > 0, \end{cases}$ 问 a 为何值时，$f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续；a 为何值时，$x = 0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点？

四、(本题满分 9 分)

设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 1 + 2t^2, \\ y = \displaystyle\int_1^{1+2\ln t} \frac{e^u}{u} du, \end{cases}$ $(t > 1)$ 所确定，求 $\left.\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right|_{x=9}$.

五、(本题满分 9 分)

计算不定积分 $\displaystyle\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx$.

六、(本题满分 12 分)

设函数 $y = y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有二阶导数，且 $y' \neq 0$，$x = x(y)$ 是 $y = y(x)$ 的反函数.

(1) 试将 $x = x(y)$ 所满足的微分方程 $\dfrac{d^2 x}{dy^2} + (y + \sin x)\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3 = 0$ 变换为 $y = (x)$ 满足的微分方程；

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = \dfrac{3}{2}$ 的解.

七、(本题满分 12 分)

讨论曲线 $y = 4\ln x + k$ 与 $y = 4x + \ln^4 x$ 的交点个数.

八、(本题满分 12 分)

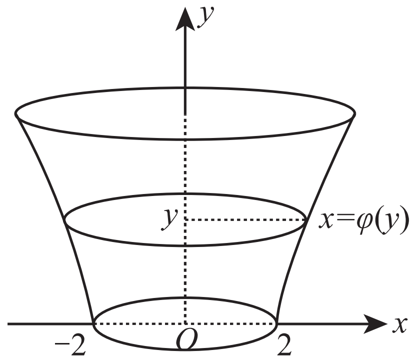
设位于第一象限的曲线 $y = f(x)$ 过点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$，其上任一点 $P(x, y)$ 处的法线与 y 轴的交点为 Q，且线段 PQ 被 x 轴平分.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 的方程；

(2) 已知曲线 $y = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上的弧长为 l，试用 l 表示曲线 $y = f(x)$ 的弧长 s.

九、(本题满分 10 分)

有一平底容器,其内侧壁是由曲线 $x=\varphi(y)\,(y\geqslant 0)$ 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面(如图),容器的底面圆的半径为 2m. 根据设计要求,当以 $3\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$ 的速率向容器内注入液体时,液面的面积将以 $\pi\mathrm{m}^2/\mathrm{min}$ 的速率均匀扩大(假设注入液体前,容器内无液体).



(1) 根据 t 时刻液面的面积,写出 t 与 $\varphi(y)$ 之间的关系式;

(2) 求曲线 $x=\varphi(y)$ 的方程.

(注:m 表示长度单位米,min 表示时间单位分.)

十、(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,在开区间 (a,b) 内可导,且 $f'(x)>0$. 若极限 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在,证明:

(1) 在 (a,b) 内 $f(x)>0$;

(2) 在 (a,b) 内存在点 ξ,使 $\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}=\dfrac{2\xi}{f(\xi)}$;

(3) 在 (a,b) 内存在与(2)中 ξ 相异的点 η,使

$$f'(\eta)(b^2-a^2)=\frac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

十一、(本题满分 10 分)

若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$ 相似于对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,试确定常数 a 的值,并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

十二、(本题满分 8 分)

已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1: ax+2by+3c=0,$$
$$l_2: bx+2cy+3a=0,$$
$$l_3: cx+2ay+3b=0.$$

试证:这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0$.

2004 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

(1) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$,则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$ ______.

(2) 设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^3+3t+1,\\ y=t^3-3t+1\end{cases}$ 确定,则曲线 $y=y(x)$ 向上凸的 x 的取值范围为 ______.

(3) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=$ ______.

(4) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=\mathrm{e}^{2x-3z}+2y$ 确定,则 $3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ______.

(5) 微分方程 $(y+x^3)\mathrm{d}x-2x\mathrm{d}y=0$ 满足 $y\Big|_{x=1}=\dfrac{6}{5}$ 的特解为______.

(6) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{ABA}^*=2\boldsymbol{BA}^*+\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,$\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵,则 $|\boldsymbol{B}|=$ ______.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分)

(7) 把 $x\to0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos(t^2)\,\mathrm{d}t$,$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$,$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin(t^3)\,\mathrm{d}t$ 排列起来,使排在后面的是前一个的高阶无穷小,则正确的排列次序是(　　)

(A) α,β,γ.　(B) α,γ,β.　(C) β,α,γ.　(D) β,γ,α.

(8) 设 $f(x)=|x(1-x)|$,则(　　)

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点,但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(B) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点,且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,$(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)^2}$ 等于(　　)

(A) $\int_1^2\ln^2x\,\mathrm{d}x$.　(B) $2\int_1^2\ln x\,\mathrm{d}x$.　(C) $2\int_1^2\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$.　(D) $\int_1^2\ln^2(1+x)\,\mathrm{d}x$.

(10) 设函数 $f(x)$ 连续,且 $f'(0)>0$,则存在 $\delta>0$,使得(　　)

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加.

(B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少.

(C) 对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$.

(D) 对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$.

(11) 微分方程 $y''+y=x^2+1+\sin x$ 的特解形式可设为(　　)

(A) $y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$.

(B) $y^*=x(ax^2+bx+c+A\sin x+B\cos x)$.

(C) $y^*=ax^2+bx+c+A\sin x$.

(D) $y^*=ax^2+bx+c+A\cos x$.

(12) 设函数 $f(u)$ 连续,区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2y\}$,则 $\iint\limits_D f(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于(　　)

(A) $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f(xy)\,\mathrm{d}y$.　　(B) $2\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(xy)\,\mathrm{d}x$.

(C) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)\,\mathrm{d}r$.　　(D) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)\,r\mathrm{d}r$.

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 2 列交换得 $\boldsymbol{B}$,再把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 3 列得 $\boldsymbol{C}$,则满足 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为(　　)

(A) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.　(B) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.　(C) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$.　(D) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(14) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 的任意两个非零矩阵,则必有(　　)

(A) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关.

(B) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.

(C) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关.

(D) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,在区间 $[0,2]$ 上,$f(x)=x(x^2-4)$,若对任意的 x 都满足 $f(x)=kf(x+2)$,其中 k 为常数.

(Ⅰ) 写出 $f(x)$ 在 $[-2,0)$ 上的表达式;

(Ⅱ) 问 k 为何值时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(17) (本题满分 11 分)

设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t$,

(Ⅰ) 证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数;

(Ⅱ) 求 $f(x)$ 的值域.

(18) (本题满分 12 分)

曲线 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 与直线 $x=0,x=t(t>0)$ 及 $y=0$ 围成一曲边梯形. 该曲边梯形绕 x 轴旋转一周得一旋转体 [illegible] 积为 $F(t)$.

（Ⅰ）求$\frac{S(t)}{V(t)}$的值；

（Ⅱ）计算极限$\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{S(t)}{F(t)}$.

（19）（本题满分 12 分）

设 $e<a<b<e^2$，证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

（20）（本题满分 11 分）

某种飞机在机场降落时，为了减少滑行距离，在触地的瞬间，飞机尾部张开减速伞，以增大阻力，使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为 9000kg 的飞机，着陆时的水平速度为 700 km/h. 经测试，减速伞打开后，飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比（比例系数为 $k=6.0\times10^6$）. 问从着陆点算起，飞机滑行的最长距离是多少？

注：kg 表示千克，km/h 表示千米/小时.

（21）（本题满分 10 分）

设 $z=f(x^2-y^2,e^{xy})$，其中 f 具有连续二阶偏导数，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

（22）（本题满分 9 分）

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\2x_1+(2+a)x_2+2x_3+2x_4=0,\\3x_1+3x_2+(3+a)x_3+3x_4=0,\\4x_1+4x_2+4x_3+(4+a)x_4=0,\end{cases}$$

试问 a 取何值时，该方程组有非零解，并求出其通解.

（23）（本题满分 9 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{pmatrix}$的特征方程有一个二重根，求 a 的值，并讨论 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化.

2005 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

(1) 设 $y=(1+\sin x)^x$,则 $\mathrm{d}y\Big|_{x=\pi}=$______.

(2) 曲线 $y=\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为______.

(3) $\displaystyle\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}=$______.

(4) 微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 的解为______.

(5) 当 $x\to0$ 时,$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小量,则 $k=$______.

(6) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维列向量,记矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\quad \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3).$$

如果 $|\boldsymbol{A}|=1$,那么 $|\boldsymbol{B}|=$______.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分)

(7) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内(　　)

(A) 处处可导.　　(B) 恰有一个不可导点.

(C) 恰有两个不可导点.　　(D) 至少有三个不可导点.

(8) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数,"$M\Leftrightarrow N$" 表示"M 的充分必要条件是 N",则必有(　　)

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.

(9) 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^2+2t,\\ y=\ln(1+t)\end{cases}$ 确定,则曲线 $y=y(x)$ 在 $x=3$ 处的法线与 x 轴交点的横坐标是(　　)

(A) $\dfrac{1}{8}\ln2+3$.　　(B) $-\dfrac{1}{8}\ln2+3$.　　(C) $-8\ln2+3$.　　(D) $8\ln2+3$.

(10) 设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant4,x\geqslant0,y\geqslant0\}$,$f(x)$ 为 D 上的正值连续函数,a,b 为常数,则 $\displaystyle\iint_D\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma=$(　　)

(A) $ab\pi$.　　(B) $\dfrac{ab}{2}\pi$.　　(C) $(a+b)\pi$.　　(D) $\dfrac{a+b}{2}\pi$.

(11) 设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\displaystyle\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\mathrm{d}t$,其中函数 φ 具有二阶导数,ψ 具有一阶导数,则必有(

(A) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　(B) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　(C) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　(D) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

(12) 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$，则(　　)

(A) $x=0,x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点.

(B) $x=0,x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

(13) 设 λ_1,λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性无关的充分必要条件是(　　)

(A) $\lambda_1\neq 0$.　(B) $\lambda_2\neq 0$.　(C) $\lambda_1=0$.　(D) $\lambda_2=0$.

(14) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n\geqslant 2)$ 阶可逆矩阵，交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，则(　　)

(A) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $\boldsymbol{B}^*$.

(B) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得 $\boldsymbol{B}^*$.

(C) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $-\boldsymbol{B}^*$.

(D) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得 $-\boldsymbol{B}^*$.

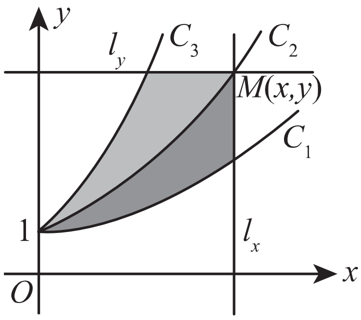
三、解答题(本题共 9 小题，满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)\,dt}{x\int_0^x f(x-t)\,dt}$.

(16)(本题满分 11 分)

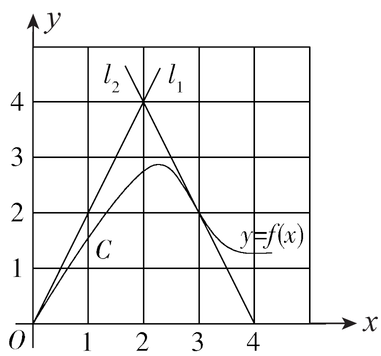
如图，C_1 和 C_2 分别是 $y=\dfrac{1}{2}(1+e^x)$ 和 $y=e^x$ 的图像，过点 $(0,1)$ 的曲线 C_3 是一单调增函数的图像，过 C_2 上任一点 $M(x,y)$ 分别作垂直于 x 轴和 y 轴的直线 l_x 和 l_y. 记 C_1,C_2 与 l_x 所围图形的面积为 $S_1(x)$；C_2,C_3 与 l_y 所围图形的面积为 $S_2(y)$. 如果总有 $S_1(x)=S_2(y)$，求曲线 C_3 的方程 $x=\varphi(y)$.



(17)(本题满分 11 分)

如图，曲线 C 的方程为 $y=f(x)$，点 $(3,2)$ 是它的一个拐点，直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点 $(0,0)$ 与 $(3,2)$ 处的切线，其交点为 $(2,4)$. 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数，计算定积分

$$\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)\,dx.$$



(18)(本题满分 12 分)

用变量代换 $x=\cos t(0<t<\pi)$ 化简微分方程 $(1-x^2)y''-xy'+y=0$,并求其满足 $y\big|_{x=0}=1$, $y'\big|_{x=0}=2$ 的特解.

(19)(本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 证明:

(Ⅰ)存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f(\xi)=1-\xi$;

(Ⅱ)存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$,使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

(20)(本题满分 10 分)

已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y$,并且 $f(1,1)=2$. 求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+\dfrac{y^2}{4}\leqslant 1\right\}$ 上的最大值和最小值.

(21)(本题满分 9 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D |x^2+y^2-1|\,\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

(22)(本题满分 9 分)

确定常数 a,使向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(a,1,1)^{\mathrm{T}}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2=(-2,a,4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_3=(-2,a,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示,但向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(23)(本题满分 9 分)

已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行是 (a,b,c),a,b,c 不全为零,矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$($k$ 为常数),且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

2006 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

(1) 曲线 $y=\dfrac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}$ 的水平渐近线方程为______.

(2) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$______.

(3) 反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}=$______.

(4) 微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解是______.

(5) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=1-x\mathrm{e}^y$ 确定,则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$______.

(6) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{E}$ 为 2 阶单位矩阵,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$,则 $|\boldsymbol{B}|=$______.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分)

(7) 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数,且 $f'(x)>0$,$f''(x)>0$,Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量,Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分,若 $\Delta x>0$,则(　　)

(A) $0<\mathrm{d}y<\Delta y$.　　(B) $0<\Delta y<\mathrm{d}y$.　　(C) $\Delta y<\mathrm{d}y<0$.　　(D) $\mathrm{d}y<\Delta y<0$.

(8) 设 $f(x)$ 是奇函数,除 $x=0$ 外处处连续,$x=0$ 是其第一类间断点,则 $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是(　　)

(A) 连续的奇函数.　　(B) 连续的偶函数.

(C) 在 $x=0$ 间断的奇函数.　　(D) 在 $x=0$ 间断的偶函数.

(9) 设函数 $g(x)$ 可微,$h(x)=\mathrm{e}^{1+g(x)}$,$h'(1)=1$,$g'(1)=2$,则 $g(1)$ 等于(　　)

(A) $\ln 3-1$.　　(B) $-\ln 3-1$.　　(C) $-\ln 2-1$.　　(D) $\ln 2-1$.

(10) 函数 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}+x\mathrm{e}^x$ 满足的一个微分方程是(　　)

(A) $y''-y'-2y=3x\mathrm{e}^x$.　　(B) $y''-y'-2y=3\mathrm{e}^x$.

(C) $y''+y'-2y=3x\mathrm{e}^x$.　　(D) $y''+y'-2y=3\mathrm{e}^x$.

(11) 设 $f(x,y)$ 为连续函数,则 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$ 等于(　　)

(A) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.　　(B) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

(C) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$.　　(D) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

(12) 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数,且 $\varphi_y'(x,y)\neq 0$. 已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点,下列选项正确的是(　　)

(A) 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$,则 $f_y'(x_0,y_0)=0$.　　(B) 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$,则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

(C) 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$,则 $f_y'(x_0,y_0)=0$.　　(D) 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$,则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

(13) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维列向量,$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,下列选项正确的是(　　)

(A) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关.

(B) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关.

(C) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,$

(D) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关.

(14) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行加到第 1 行得 $\boldsymbol{B}$,再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 $\boldsymbol{C}$,记 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,则(　　)

(A) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$.　(B) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$.　(C) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$.　(D) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}$.

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 10 分)

试确定常数 A,B,C 的值,使得 $e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$,其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小量.

(16)(本题满分 10 分)

求 $\displaystyle\int\frac{\arcsin e^x}{e^x}dx$.

(17)(本题满分 10 分)

设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0\}$,计算二重积分 $I=\displaystyle\iint_D\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy$.

(18)(本题满分 12 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi,x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$.

(Ⅰ) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求该极限;　(Ⅱ) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

(19)(本题满分 10 分)

证明:当 $0<a<b<\pi$ 时,$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a$.

(20)(本题满分 12 分)

设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数,且 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足等式 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

(Ⅰ) 验证 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$;　(Ⅱ) 若 $f(1)=0,f'(1)=1$,求函数 $f(u)$ 的表达式.

(21)(本题满分 12 分)

已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases}x=t^2+1,\\y=4t-t^2,\end{cases}(t\geqslant 0)$.

(Ⅰ) 讨论 L 的凹凸性;

(Ⅱ) 过点 $(-1,0)$ 引 L 的切线,求切点 (x_0,y_0),并写出切线的方程;

(Ⅲ) 求此切线与 L(对应于 $x\leqslant x_0$ 的部分)及 x 轴所围成的平面图形的面积.

(22)(本题满分 9 分)

已知非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1,\\4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1,\\ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1\end{cases}$ 有三个线性无关的解.

(Ⅰ) 证明方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$;　(Ⅱ) 求 a,b 的值及方程组的通解.

(23)(本题满分 9 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3,向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个解.

(Ⅰ) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量;　(Ⅱ) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$.

2007 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 10 小题,每小题 4 分,满分 40 分)

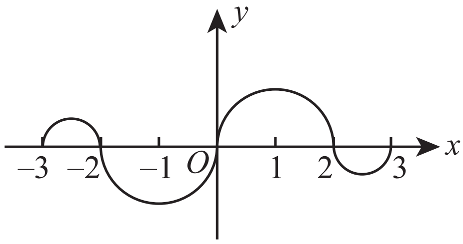
(1) 当 $x \to 0^+$ 时,与$\sqrt{x}$等价的无穷小量是(　　)

(A)$1-e^{\sqrt{x}}$.　　(B)$\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$.　　(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$.　　(D)$1-\cos\sqrt{x}$.

(2) 函数$f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$在$[-\pi,\pi]$上的第一类间断点是 $x=$(　　)

(A)0.　　(B)1.　　(C) $-\dfrac{\pi}{2}$.　　(D) $\dfrac{\pi}{2}$.

(3) 如图,连续函数 $y=f(x)$ 在区间$[-3,-2]$,$[2,3]$上的图形分别是直径为1的上、下半圆周,在区间$[-2,0]$,$[0,2]$上的图形分别是直径为2的下、上半圆周. 设 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$,则下列结论正确的是(　　)



(A)$F(3)=-\dfrac{3}{4}F(-2)$.　　(B)$F(3)=\dfrac{5}{4}F(2)$.

(C)$F(-3)=\dfrac{3}{4}F(2)$.　　(D)$F(-3)=-\dfrac{5}{4}F(-2)$.

(4) 设函数$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,下列命题错误的是(　　)

(A) 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在,则$f(0)=0$.　　(B) 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$存在,则$f(0)=0$.

(C) 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在,则 $f'(0)$ 存在.　　(D) 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$存在,则 $f'(0)$ 存在.

(5) 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 渐近线的条数为(　　)

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

(6) 设函数$f(x)$ 在$(0,+\infty)$内具有二阶导数,且 $f''(x)>0$,令 $u_n=f(n)$ $(n=1,2,\cdots)$,则下列结论正确的是(　　)

(A) 若 $u_1>u_2$,则$\{u_n\}$ 必收敛.　　(B) 若 $u_1>u_2$,则$\{u_n\}$ 必发散.

(C) 若 $u_1<u_2$,则$\{u_n\}$ 必收敛.　　(D) 若 $u_1<u_2$,则$\{u_n\}$ 必发散.

(7) 二元函数$f(x,y)$ 在点$(0,0)$ 处可微的一个充分条件是(　　)

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$.

(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$,且$\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$.

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

(D) $\lim\limits_{x\to 0}[f_x'(x,0)-f_x'(0,0)]=0$,且$\lim\limits_{y\to 0}[f_y'(0,y)-f_y'(0,0)]=0$.

(8) 设函数$f(x,y)$连续,则二次积分$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y$等于(　　)

(A) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$.

(C) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(D) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$.

(9) 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,则下列向量组线性相关的是(　　)

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$.

(10) 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 则$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$(　　)

(A) 合同且相似.　　(B) 合同,但不相似.

(C) 不合同,但相似.　　(D) 既不合同,也不相似.

二、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分)

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}=$______.

(12) 曲线$\begin{cases}x=\cos t+\cos^2 t,\\ y=1+\sin t\end{cases}$上对应于$t=\dfrac{\pi}{4}$的点处的法线斜率为______.

(13) 设函数$y=\dfrac{1}{2x+3}$,则$y^{(n)}(0)=$______.

(14) 二阶常系数非齐次线性微分方程$y''-4y'+3y=2\mathrm{e}^{2x}$的通解为______.

(15) 设$f(u,v)$是二元可微函数,$z=f\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{x}{y}\right)$,则$x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$______.

(16) 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,则$\boldsymbol{A}^3$的秩为______.

三、解答题(本题共8小题,满分86分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(17) (本题满分10分)

设$f(x)$是区间$\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$上的单　、可导函数,且满足

$$\int_0^{f(x)}f^{-1}(t)\mathrm{d}t=\int_0^x t\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t,$$

其中f^{-1}是f的反函数,求$f(x)$.

(18) (本题满分11分)

设D是位于曲线$y=\sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}}(a>1,0\leqslant x<+\infty)$下方、$x$轴上方的无界区域.

(Ⅰ) 求区域D绕

（Ⅱ）当 a 为何值时，$V(a)$ 最小？并求此最小值.

(19)（本题满分 10 分）

求微分方程 $y''(x+y'^2)=y'$ 满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$ 的特解.

(20)（本题满分 11 分）

已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数，且 $f'(0)=1$，函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^{y-1}=1$ 所确定. 设 $z=f(\ln y-\sin x)$，求 $\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=0}$，$\left.\dfrac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=0}$.

(21)（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

(22)（本题满分 11 分）

设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2, & |x|+|y|\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1<|x|+|y|\leqslant 2,\end{cases}$$

计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 2\}$.

(23)（本题满分 11 分）

设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+2x_2+ax_3=0,\\ x_1+4x_2+a^2x_3=0,\end{cases}\qquad ①$$

与方程组

$$x_1+2x_2+x_3=a-1\qquad ②$$

有公共解，求 a 的值及所有公共解.

(24)（本题满分 11 分）

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=-2$，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^T$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 的一个特征向量. 记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

（Ⅰ）验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量，并求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值与特征向量；

（Ⅱ）求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

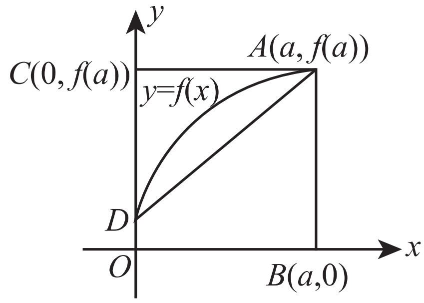
2008 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分)

(1) 设函数 $f(x)=x^2(x-1)(x-2)$,则 $f'(x)$ 的零点个数为(　　)

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

(2) 如图,曲线段的方程为 $y=f(x)$,函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有连续的导数,则定积分 $\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x$ 等于(　　)



(A) 曲边梯形 $ABOD$ 的面积.

(B) 梯形 $ABOD$ 的面积.

(C) 曲边三角形 ACD 的面积.

(D) 三角形 ACD 的面积.

(3) 在下列微分方程中,以 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$($C_1,C_2,C_3$ 为任意常数) 为通解的是(　　)

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$.　　(B) $y'''+y''+4y'+4y=0$.

(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$.　　(D) $y'''-y''+4y'-4y=0$.

(4) 设函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$,则 $f(x)$ 有(　　)

(A)1 个可去间断点,1 个跳跃间断点.　　(B)1 个可去间断点,1 个无穷间断点.

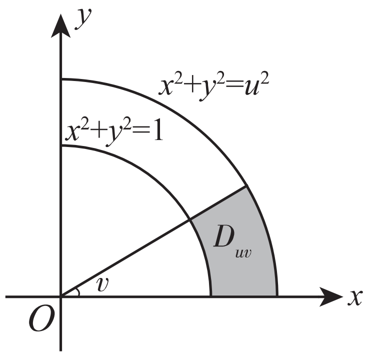
(C)2 个跳跃间断点.　　(D)2 个无穷间断点.

(5) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界,$\{x_n\}$ 为数列,下列命题正确的是(　　)

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.　　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 收敛.　　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调,则 $\{x_n\}$ 收敛.

(6) 设函数 f 连续. 若 $F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\dfrac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中区域 D_{uv} 为图中阴影部分,则 $\dfrac{\partial F}{\partial u}=$(　　)



(A) $vf(u^2)$.　　(B) $\dfrac{v}{u}f(u^2)$.

(C) $vf(u)$.　　(D) $\dfrac{v}{u}f(u)$.

(7) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$,则(　　)

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.　　(B) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.

(C) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.　　(D) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.

(8) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$,则在实数域上与 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵为(　　)

(A) $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$.　　(C) $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

(9) 已知函数 $f(x)$ 连续,且 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos[xf(x)]}{(e^{x^2}-1)f(x)} = 1$,则 $f(0) =$ ______.

(10) 微分方程 $(y + x^2 e^{-x})dx - xdy = 0$ 的通解是 $y =$ ______.

(11) 曲线 $\sin(xy) + \ln(y - x) = x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程是______.

(12) 曲线 $y = (x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标为______.

(13) 设 $z = \left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$,则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} =$ ______.

(14) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,3,\lambda$. 若行列式 $|2\boldsymbol{A}| = -48$,则 $\lambda =$ ______.

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 9 分)

求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{[\sin x - \sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = \displaystyle\int_0^{t^2} \ln(1+u)\,du \end{cases}$ 确定,其中 $x(t)$ 是初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 2te^{-x} = 0, \\ x\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$ 的解,求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(17)(本题满分 9 分)

计算 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

(18)(本题满分 11 分)

计算 $\displaystyle\iint\limits_D \max\{xy,1\}\,dxdy$,其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$.

(19)(本题满分 11 分)

设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上具有连续导数的单调增加函数,且 $f(0) = 1$. 对任意的 $t \in [0,+\infty)$,直线 $x = 0, x = t$,曲线 $y = f(x)$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周生成一旋转体. 若该旋转体的侧面积在数值上等于其体积的 2 倍,求函数 $f(x)$ 的表达式.

(20)(本题满分 11 分)

(Ⅰ)证明积分中值定理:若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则至少存在一点 $\eta \in [a,b]$,使得 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = f(\eta)(b-a)$;

(Ⅱ)若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数,且满足 $\varphi(2) > \varphi(1)$,$\varphi(2) > \displaystyle\int_2^3 \varphi(x)dx$,则至少存在一点 $\xi \in (1,3)$,使得 $\varphi''(\xi) < 0$.

(21)(本题满分 11 分)

求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在约束条件 $z = x^2 + y^2$ 和 $x + y + z = 4$ 下的最大值与最小值.

(22)(本题满分 12 分)

设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n\times n},\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)证明行列式 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$;

(Ⅱ)当 a 为何值时,该方程组有唯一解,并求 x_1;

(Ⅲ)当 a 为何值时,该方程组有无穷多解,并求通解.

(23)(本题满分 10 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量,向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(Ⅰ)证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关;

(Ⅱ)令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$.

2009 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分)

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为(　　)

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 无穷多个.

(2) 当 $x\to 0$ 时, $f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小量,则(　　)

(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$.　　(B) $a=1,b=\dfrac{1}{6}$.

(C) $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$.　　(D) $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$.

(3) 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $\mathrm{d}z=x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$,则点 $(0,0)$(　　)

(A) 不是 $f(x,y)$ 的连续点.　　(B) 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

(C) 是 $f(x,y)$ 的极大值点.　　(D) 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

(4) 设函数 $f(x,y)$ 连续,则 $\int_1^2\mathrm{d}x\int_x^2 f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^{4-y}f(x,y)\mathrm{d}x=$(　　)

(A) $\int_1^2\mathrm{d}x\int_1^{4-x}f(x,y)\mathrm{d}y$.　　(B) $\int_1^2\mathrm{d}x\int_x^{4-x}f(x,y)\mathrm{d}y$.

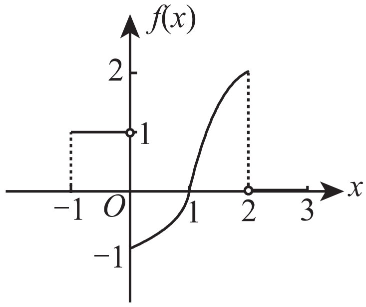
(C) $\int_1^2\mathrm{d}y\int_1^{4-y}f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(D) $\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^{2}f(x,y)\mathrm{d}x$.

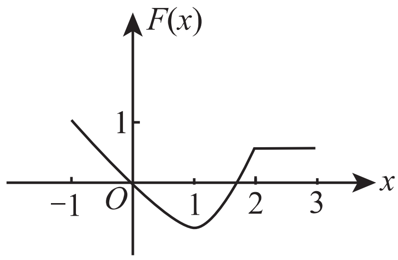
(5) 若 $f''(x)$ 不变号,且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率圆为 $x^2+y^2=2$,则函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内(　　)

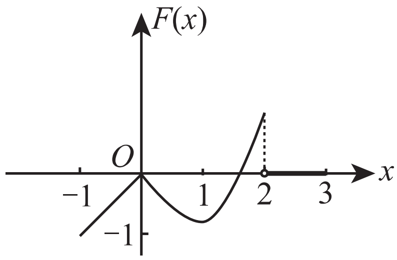
(A) 有极值点,无零点.　　(B) 无极值点,有零点.

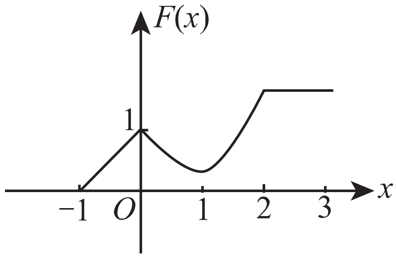
(C) 有极值点,有零点.　　(D) 无极值点,无零点.

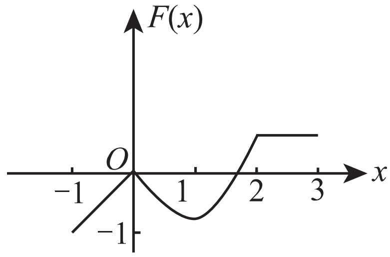
(6) 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形如图所示,则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的图形为(　　)



(A)


(B)


(C) 

(D) 

(7) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶方阵,$\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵. 若 $|\boldsymbol{A}|=2$, $|\boldsymbol{B}|=3$,则分块矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为(　　)

(A) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B}^*\\ 2\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$. (B $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^*\\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$. (C) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}^*\\ 2\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{A}^*\\ 3\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

(8) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{P}$ 均为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{P}$ 的转置矩阵,且 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为(　　)

(A) $\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. (C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

(9) 曲线 $\begin{cases}x=\displaystyle\int_0^{1-t}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u,\\ y=t^2\ln(2-t^2)\end{cases}$ 在点(0, 0)处的切线方程为______.

(10) 已知 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{k|x|}\mathrm{d}x=1$,则 $k=$______.

(11) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x=$______.

(12) 设 $y=y(x)$ 是由方程 $xy+\mathrm{e}^y=x+1$ 确定的隐函数,则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=$______.

(13) 函数 $y=x^{2x}$ 在区间(0, 1]上的最小值为______.

(14) 设 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 为 3 维列向量, $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置. 若矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=$______.

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 9 分)

求极限 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4x}$.

(16)(本题满分 10 分)

计算不定积分 $\displaystyle\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x\ (x>0)$.

(17)(本题满分 10 分)

设 $z = f(x+y, x-y, xy)$,其中 f 具有二阶连续偏导数,求 $\mathrm{d}z$ 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

(18)(本题满分 10 分)

设非负函数 $y = y(x)(x \geqslant 0)$ 满足微分方程 $xy'' - y' + 2 = 0$. 当曲线 $y = y(x)$ 过原点时,其与直线 $x = 1$ 及 $y = 0$ 围成平面区域 D 的面积为 2,求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体体积.

(19)(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 2, y \geqslant x\}$.

(20)(本题满分 12 分)

设 $y = y(x)$ 是区间 $(-\pi, \pi)$ 内过点 $\left(-\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}, \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$ 的光滑曲线. 当 $-\pi < x < 0$ 时,曲线上任一点处的法线都过原点;当 $0 \leqslant x < \pi$ 时,函数 $y(x)$ 满足 $y'' + y + x = 0$. 求 $y(x)$ 的表达式.

(21)(本题满分 11 分)

(Ⅰ)证明拉格朗日中值定理:若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,在 (a, b) 内可导,则存在点 $\xi \in (a, b)$,使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$.

(Ⅱ)证明:若函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续,在 $(0, \delta)(\delta > 0)$ 内可导,且 $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = A$,则 $f'_+(0)$ 存在,且 $f'_+(0) = A$.

(22)(本题满分 11 分)

设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2 = \boldsymbol{\xi}_1$,$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3 = \boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$;

(Ⅱ)对(Ⅰ)中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$,证明 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

(23)(本题满分 11 分)

设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

(Ⅰ)求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(Ⅱ)若二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$,求 a 的值.

1987 年真题参考答案

(试卷 Ⅲ)

一、填空题

(1) $\dfrac{a}{1+ax}$；$\dfrac{-a^2}{(1+ax)^2}$.

(2) $y-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}(x-1)$；$y-\dfrac{\pi}{4}=-2(x-1)$.

(3) $f(x)$ 在$[a,b]$上连续；在$[a,b]$上至少存在一点 ξ，使$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$ 成立.

(4) e^{-3}.

(5) $f(x)+C$，其中 C 为任意常数；$\dfrac{1}{2}[f(2b)-f(2a)]$.

二、$\dfrac{1}{2}$.

三、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$；$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\dfrac{1}{5(1-\cos t)^2}$.

四、$\dfrac{\pi}{8}$.

五、$\dfrac{\pi}{2}(8+3\pi)$.

六、(1) 证明略.(可利用拉格朗日中值定理.)

(2) 证明略.(可利用导数(二阶导数)的定义和极限的保号性.)

七、当 $a\neq 0,b\neq 0$ 时，积分为$\dfrac{1}{ab}\arctan\left(\dfrac{a}{b}\tan x\right)+C$；当 $a=0,b\neq 0$ 时，积分为$\dfrac{1}{b^2}\tan x+C$；

当 $a\neq 0,b=0$ 时，积分为 $-\dfrac{1}{a^2}\cot x+C$. 其中的 C 均为任意常数.

八、(1) $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{x}$.

(2) $y(x)=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{1}{4}(x-1)\mathrm{e}^{x}$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

九、选择题

(1) D. (2) C. (3) B. (4) D.

十、在点$\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{2}{3}\right)$处取得最小面积，最小面积为 $S\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{2}{9}(2\sqrt{3}-3)$.

1988 年真题参考答案

（试卷 Ⅲ）

一、填空题

（1）1. （2）$(1+2t)e^{2t}$. （3）$\frac{1}{12}$. （4）1. （5）$2(e^2+1)$.

二、选择题

（1）A. （2）C. （3）B. （4）B. （5）A.

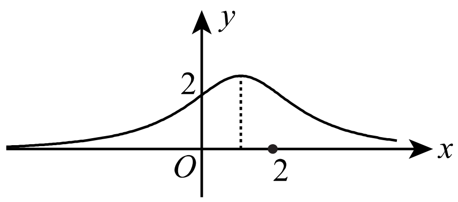
三、（1）$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，$x\leqslant 0$.

（2）$y'\big|_{x=0}=1$，$y''\big|_{x=0}=2$.

（3）$y=\frac{1}{x}(\arctan x+C)$，其中 C 为任意常数.

四、

单调增加区间	$(-\infty,1)$
单调减少区间	$(1,+\infty)$
极值点	1
极值	2
凹区间	$(-\infty,0)$ 及 $(2,+\infty)$
凸区间	$(0,2)$
拐点	$\left(0,\frac{3}{2}\right)$及$\left(2,\frac{3}{2}\right)$
渐近线	$y=0$



五、当圆的周长为 $x=\frac{\pi a}{4+\pi}$，正方形的周长为 $a-x=\frac{4a}{4+\pi}$ 时，两图形的面积之和最小.

六、$y=(1-2x)e^x$.

七、当 $-1\leqslant x<0$ 时，积分为$\frac{1}{2}(1+x)^2$；当 $x\geqslant 0$ 时，积分为 $1-\frac{1}{2}(1-x)^2$.

八、（1）$f'(0)$.

（2）证明略.（可利用 $f(x)$ 的有界性以及积分估值定理.）

1989 年真题参考答案

(试卷 Ⅲ)

一、填空题

(1) $\frac{1}{2}$. (2) π. (3) $y=2x$. (4) $n!$. (5) $x-1$. (6) $a=b$.

(7) $\cot^2 y\mathrm{d}x$ 或者$\frac{1}{(x+y)^2}\mathrm{d}x$.

二、(1) $-\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x(1-\mathrm{e}^{-2\sqrt{x}})}}$.

(2) $-\frac{1}{\ln x}+C$,其中 C 为任意常数.

(3) e^2.

(4) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2t}$; $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{1+t^2}{4t^3}$.

(5) 0.

三、选择题

(1) A. (2) B. (3) C. (4) D. (5) B. (6) D.

四、$y=\frac{\mathrm{e}^x}{x}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e})$.

五、$f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x$.

六、证明略.(可利用零点定理和 $F(x)$ 的单调性.)

七、

单调增加区间	$(-2,0)$
单调减少区间	$(-\infty,-2),(0,+\infty)$
极值点	-2
极值	$-\frac{1}{4}$
凹区间	$(-3,0),(0,+\infty)$
凸区间	$(-\infty,-3)$
拐点	$\left(-3,-\frac{2}{9}\right)$
渐近线	$x=0$ 和 $y=0$

八、当 $a=-\frac{5}{4}$, $b=\frac{3}{2}$, $c=0$ 时,体积 V 最小.

1990 年真题参考答案

(试卷 Ⅲ)

一、填空题

(1) $y=\sqrt{3}x-1$. (2) $-\frac{1}{x^2}e^{\tan\frac{1}{x}}\left(\sec^2\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)$. (3 $\frac{4}{15}$. (4) >. (5) 1.

二、选择题

(1) C. (2) B. (3) A. (4) A. (5) B.

三、(1) $a=\ln 3$.

(2) $dy=\frac{x}{2x-y}dx$.

(3) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{3}{4}\right)$.

(4) $\frac{\ln x}{1-x}+\ln\frac{|1-x|}{x}+C$,其中 C 为任意常数.

(5) $\frac{1}{2}\left(\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)$.

四、所求点为$\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$.

五、证明略.(可考虑函数$f(x)=\arctan x+\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}$,$x>0$,计算$f'(x)$,并利用$f(x)$的单调性.)

六、$\frac{1}{2}\ln^2 x$.

七、所求旋转体的体积 $V=\frac{\pi}{6}$.

八、通解为

$$y=\begin{cases}(C_1+C_2x)e^{-2x}+\frac{1}{(a+2)^2}e^{ax}, & a\neq-2,\\ \left(C_1+C_2x+\frac{1}{2}x^2\right)e^{-2x}, & a=-2,\end{cases}$$ 其中 C_1,C_2 为任意常数.

1991 年真题参考答案

(试卷 Ⅲ)

一、填空题

(1) $-\dfrac{\ln 3}{3^x+1}\mathrm{d}x$.　(2) $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.　(3) 1.　(4) $\dfrac{1}{2}$.　(5) -1.

二、选择题

(1) D.　(2) B.　(3) B.　(4) D.　(5) A.

三、(1) $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{2+t^2}{(\cos t-t\sin t)^3}$.

(2) $2\ln\dfrac{4}{3}$.

(3) $\dfrac{1}{6}$.

(4) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{1}{4}x\sin 2x-\dfrac{1}{8}\cos 2x+C$,其中 C 为任意常数.

(5) $y=\dfrac{x-1}{x}\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{x}$.

四、证明略.(可考虑函数 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-x\ln x$,计算 $f'(x)$,并利用 $f(x)$ 的单调性.)

五、$y=C_1\cos x+C_2\sin x+x+\dfrac{1}{2}x\sin x$,其中 C_1,C_2 为任意常数.

六、$\dfrac{\pi}{2}$.

七、当点 B 的横坐标为 $\dfrac{1}{3}\ln 2-1$,点 C 的横坐标为 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\ln 2$ 时,梯形面积最大.

八、π^2-2.

1992 年真题参考答案

(试卷 Ⅲ)

一、填空题

(1) 3.　(2) $\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$.　(3) 0.　(4) $\frac{1}{2}\ln 2$.　(5) $\frac{1}{2}\mathrm{e}-1$.

二、选择题

(1) B.　(2) D.　(3) D.　(4) C.　(5) B.

三、(1) $\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$.

(2) $2\mathrm{e}^2$.

(3) $\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+C$,其中 C 为任意常数.

(4) $4(\sqrt{2}-1)$.

(5) $y=C\sqrt{x}-\frac{1}{5}x^3,(x>0)$, $y=C\sqrt{-x}-\frac{1}{5}x^3,(x<0)$,其中 C 为任意常数.

四、$\frac{7}{3}-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

五、$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}-\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\mathrm{e}^x$,其中 C_1,C_2 为任意常数.

六、$\ln 3-\frac{1}{2}$.

七、当 $t=1$ 时,S 取最小值,此时 l 的方程为 $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$.

八、证明略.(可利用拉格朗日中值定理.)

1993 年真题参考答案

(试卷 Ⅲ)

一、填空题

(1) 0.

(2) $\dfrac{y^2-2x\cos(x^2+y^2)-e^x}{2y\cos(x^2+y^2)-2xy}$.

(3) $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$.

(4) $\dfrac{2}{\sqrt{\cos x}}+C$,其中 C 为任意常数.

(5) $\dfrac{1}{2}(1+x^2)[\ln(1+x^2)-1]$.

二、选择题

(1) D. (2) A. (3) D. (4) B. (5) C.

三、(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=2f'(x^2)\cos[f(x^2)]+4x^2\{f''(x^2)\cos[f(x^2)]-[f'(x^2)]^2\sin[f(x^2)]\}$.

(2) -50.

(3) $\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4}\ln 2$.

(4) $\dfrac{1}{2}$.

(5) $y=\dfrac{\sin x-1}{x^2-1}$.

四、$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+xe^x$,其中 C_1,C_2 为任意常数.

五、$V=\dfrac{\pi^2}{2}-\dfrac{2}{3}\pi$.

六、当 $h=4r$ 时,V 取最小值,$V(4r)=\dfrac{8\pi r^3}{3}$.

七、证明略.(可利用 $y=\ln x$ 的单调性,考虑函数 $f(x)=(a+x)\ln a-a\ln(a+x)$,计算 $f'(x)$,并利用 $f(x)$ 的单调性.)

八、证明略.(可利用拉格朗日中值定理.)

1994 年真题参考答案

(试卷 Ⅲ)

一、填空题

(1) -2.

(2) $\frac{1}{t}(6t+5)(t+1)$.

(3) $-3f(\cos 3x)\sin 3x$.

(4) $\frac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2}+C$,其中 C 为任意常数.

(5) $(x-4)y^4=Cx$,其中 C 为任意常数.

二、选择题

(1) A. (2) B. (3) C. (4) B. (5) D.

三、(1) $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{f''}{(1-f')^3}$.

(2) $\frac{3}{32}\pi$.

(3) e^4.

(4) $\frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$,其中 C 为任意常数.

(5) 证明略.(分别计算 D 和 D_1.)

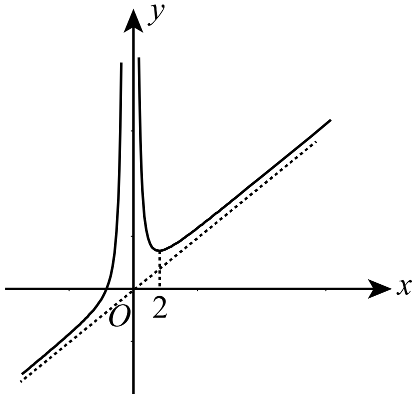
四、当 $k\leqslant 0$ 或 $k=\frac{2}{9}\sqrt{3}$ 时,方程有且仅有一个解.

五、(1) $(-\infty,0)$ 和 $(2,+\infty)$ 为增区间,$(0,2)$ 为减区间,$x=2$ 为极小值点,极小值为 $y=3$.

(2) $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 均为凹区间,无拐点.

(3) $x=0$ 为铅直渐近线,$y=x$ 为斜渐近线.

(4) 如右图.



六、当 $a\neq 1$ 时,通解为 $y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\frac{1}{a^2-1}\sin x$;当 $a=1$ 时,通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$,其中 C_1,C_2 为任意常数.

七、证明略.(注意到 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^\lambda f(x)dx+\int_\lambda^1 f(x)dx$,可利用积分中值定理)

八、$V=\frac{448}{15}\pi$.

1995 年真题参考答案

(试卷 Ⅲ)

一、填空题

(1) $-2x\sin(x^2)\sin^2\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x}\cos(x^2)$.

(2) $y=-2x+C_1\cos x+C_2\sin x$,其中 C_1,C_2 为任意常数.

(3) $3x-y-7=0$.

(4) $\frac{1}{2}$.

(5) $y=0$.

二、选择题

(1) D.　(2) C.　(3) D.　(4) B.　(5) A.

三、(1) $\frac{1}{2}$.

(2) $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{f''(y)-[1-f'(y)]^2}{x^2[1-f'(y)]^3}$.

(3) $2\ln(x-1)+x+C$,其中 C 为任意常数.

(4) $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(5) $S=8$.

(6) $\frac{2}{3}v_0$.

四、$f(x)$ 的最大值是 $1+\mathrm{e}^{-2}$,最大值点是 $x=\pm\sqrt{2}$, $f(x)$ 的最小值是 0,最小值点是 $x=0$.

五、$y=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}}$.

六、点 P 的坐标为$\left(x_0-\frac{y_0'(1+y_0'^2)}{y_0''},\ y_0+\frac{1+y_0'^2}{y_0''}\right)$.

七、2.

八、证明略.(可考虑函　$F(x)=f(x)-x$,计算 $F'(x)$,并证明 $F(0)$ 是 $F(x)$ 的最小值.)

1996 年真题参考答案

（试卷 Ⅲ）

一、填空题

（1）$\frac{1}{3}$.

（2）2.

（3）$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

（4）2.

（5）$\ln 2-\frac{1}{2}$.

二、选择题

（1）A.　（2）C.　（3）D.　（4）C.　（5）B.

三、（1）$\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（2）$\tan x-\sec x+C$，其中 C 为任意常数.

（3）$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4[f'(t^2)+2t^2f''(t^2)]}{f(t^2)}$.

（4）$f(x)=1-2x+2x^2+\cdots+(-1)^n2x^n+(-1)^{n+1}\frac{2x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}}$，$0<\theta<1$.

（5）$y=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x+C_1+C_2e^{-x}$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

（6）$V=\frac{2a^2b}{3}\tan\alpha$.

四、$-\frac{\arctan x}{x}-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C$，其中 C 为任意常数.

五、（1）$g(x)=\begin{cases}-\sqrt{\frac{1-x}{2}}, & x<-1,\\ \sqrt[3]{x}, & -1\leqslant x\leqslant 8,\\ \frac{x+16}{12}, & x>8.\end{cases}$

（2）$g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处连续，没有间断点. $g(x)$ 的不可导点是 $x=0$ 和 $x=-1$.

六、唯一驻点为 $x=1$，也是 $y=y(x)$ 的极小值点.

七、证明略.（可用反证法.）

八、（1）$y(x)=e^{-ax}\int_0^x f(t)e^{at}dt$.

（2）简要证明：

$$|y(x)|\leqslant e^{-ax}\int_0^x|f(t)|e^{at}dt\leqslant ke^{-ax}\int_0^x e^{at}dt\leqslant\frac{k}{a}e^{-ax}(e^{ax}-1)=\frac{k}{a}(1-e^{-ax}),\ x\geqslant 0.$$

1997 年真题参考答案

一、填空题

(1) $e^{-\frac{1}{2}}$.

(2) $-\dfrac{3}{2}$.

(3) $2\arcsin\dfrac{\sqrt{x}}{2}+C$ 或 $\arcsin\dfrac{x-2}{2}+C$,其中 C 为任意常数.

(4) $\dfrac{\pi}{8}$.

(5) 3.

二、选择题

(1) C.　(2) B.　(3) B.　(4) A.　(5) D.

三、(1) 1.

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(y^2-e^t)(1+t^2)}{2(1-ty)}$.

(3) $e^{2x}\tan x+C$,其中 C 为任意常数.

(4) $xy^2-x^2y-x^3=C$,其中 C 为任意常数.

(5) $y''-y'-2y=e^x-2xe^x$.

(6) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

四、当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-\dfrac{4}{5}$ 时,原方程组有唯一解. 当 $\lambda=1$ 时,原方程组有无穷多解,其通解为

$(x_1,x_2,x_3)^T=(1,-1,0)^T+k(0,1,1)^T$,其中 k 为任意常数. 当 $\lambda=-\dfrac{4}{5}$ 时,原方程组无解.

五、所求曲线 L 的方程为 $x+\sqrt{3}y=2$ 和 $x-\sqrt{3}y=2$.

六、$a=-5$ 时,旋转体体积最小.

七、$\varphi'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}, & x\neq0,\\ \dfrac{A}{2}, & x=0.\end{cases}$ $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

八、记 $x_0=\arccos\dfrac{2}{\pi}$, $y_0=x_0-\dfrac{\pi}{2}\sin x_0$. 当 $k<y_0$ 或 $k\geqslant0$ 时,原方程在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内没有根;当 $k=y_0$ 时,原方程在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内有唯一根 x_0;当 $y_0<k<0$ 时,原方程在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内恰有两个不同的根.

1998 年真题参考答案

一、填空题

(1) $-\dfrac{1}{4}$.　(2) $\dfrac{37}{12}$.　(3) $-\cot x\ln(\sin x)-\cot x-x+C$,其中 C 为任意常数.

(4) $xf(x^2)$.　(5) $y=x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

二、选择题

(1) D.　(2) C.　(3) A.　(4) C.　(5) B.

三、$f(x)$ 的间断点有 $x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$,其中 $x=\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{5}{4}\pi$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点(无穷间断点),$x=\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

四、$a=1,\ b=0,\ c=\dfrac{1}{2}$.

五、原方程可化简为 $u''+4u=\mathrm{e}^x$,原方程的通解为 $y=C_1\dfrac{\cos 2x}{\cos x}+2C_2\sin x+\dfrac{\mathrm{e}^x}{5\cos x}$,其中 C_1,C_2 为任意常数.

六、$\dfrac{\pi}{2}+\ln(2+\sqrt{3})$.

七、y 与 v 所满足的微分方程为 $mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=mg-B\rho-kv$.

所求函数关系为 $y=-\dfrac{m}{k}v-\dfrac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln\dfrac{mg-B\rho-kv}{mg-B\rho}$.

八、(1) 证明略.(考虑函数 $F(x)=-x\displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$,对 $F(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上使用罗尔定理.)

(2) 证明略.(证明 $F'(x)$ 单调.)

九、所求表面积为 $\dfrac{\pi}{6}(11\sqrt{5}-1)$.

十、所求曲线方程为 $y=\ln\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)+1+\dfrac{1}{2}\ln 2,\ -\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{3\pi}{4}$.

当 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 时,y 取极大值,极大值为 $y=1+\dfrac{1}{2}\ln 2$. 函数无极小值.

十一、(1) 证明略.(考虑函数 $f(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$,计算 $f'(x)$,并利用 $f(x)$ 的单调性.)

(2) 证明略.(考虑函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x},\ x\in(0,1]$,计算 $f'(x)$,并利用 $f(x)$ 的单调性.)

十二、$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$.

十三、(1) 当 $b\neq 2$ 时, $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(2) 当 $b=2,\ a\neq 1$ 时, $\boldsymbol{\beta}$ 可唯一表示为 $\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$;当 $b=2,\ a=1$ 时, $\boldsymbol{\beta}$ 可表示为 $-(2k+1)\boldsymbol{\alpha}_1+($ [illegible]

1999 年真题参考答案

一、填空题

(1) $y+2x-1=0$.

(2) 1.

(3) $\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13)+4\arctan\frac{x-3}{2}+C$,其中 C 为任意常数.

(4) $\frac{\sqrt{3}+1}{12}\pi$.

(5) $y=C_1e^{-2x}+\left(C_2+\frac{1}{4}x\right)e^{2x}$,其中 C_1,C_2 为任意常数.

二、选择题

(1) D.　(2) C.　(3) A.　(4) C.　(5) B.

三、$-\frac{1}{2}$.

四、$\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$.

五、$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$.

六、需要作功 91500 J.

七、(1) 函数的单调增区间为$(-\infty,1)$和$(3,+\infty)$,单调减区间为$(1,3)$,极小值点为$x=3$,对应的极小值为$\frac{27}{4}$.

(2) 函数的凹区间为$(0,1)$和$(1,+\infty)$,凸区间为$(-\infty,0)$,拐点为$(0,0)$.

(3) $x=1$ 是函数图形的铅直渐近线,$y=x+2$ 是函数图形的斜渐近线.

八、证明略.(可应用泰勒中值定理,展开到 3 阶.)

九、所求曲线方程为 $y=e^x$.

十、证明略.(利用$f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}f(x)dx\leqslant f(k)$,可得 $a_n\geqslant 0$,再由 $a_{n+1}-a_n\leqslant 0$ 可知数列$\{a_n\}$单调减少.由单调有界准则可知数列$\{a_n\}$极限存在)

十一、$\boldsymbol{X}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$.

十二、(1)$p\neq 2$ 时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,

$$\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{3p-4}{p-2}\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\frac{1-p}{p-2}\boldsymbol{\alpha}_4.$$

(2) 当 $p=2$ 时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关,它的秩为 3,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$或 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 构成其一个极大线性无关组.

2000 年真题参考答案

一、填空题

(1) $-\frac{1}{6}$.　(2) $(\ln 2-1)\mathrm{d}x$.　(3) $\frac{\pi}{3}$.　(4) $y=2x+1$.　(5) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-3&4\end{pmatrix}$.

二、选择题

(1) D.　(2) C.　(3) A.　(4) C.　(5) B.

三、$x-(1+\mathrm{e}^{-x})\ln(1+\mathrm{e}^{x})+C$,其中 C 为任意常数.

四、$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\frac{1}{6}x^3, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -\frac{1}{6}x^3+x^2-x+\frac{1}{3}, & 1<x\leqslant 2,\\ x-1, & x>2.\end{cases}$

五、$f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}\ (n\geqslant 3)$.

六、(1) 证明略.(cos x 是周期函数,可利用$\int_0^{n\pi}|\cos x|\mathrm{d}x=n\int_0^{\pi}|\cos x|\mathrm{d}x=2n$.)

(2) $\frac{2}{\pi}$.

七、$6\ln 3$ 年.

八、证明略.(考虑函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,找$(0,\pi)$内一点$\xi$,使得 $F(\xi)=0$. 与 $F(0)=F(\pi)=0$ 相结合,使用两次罗尔定理.)

九、所求切线方程为 $2x-y-12=0$.

十、当 $a=4$ 时,旋转体体积最大,为$\frac{32\sqrt{5}}{1875}\pi$.

十一、(1) $f'(x)=-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}$.

(2) 证明略.(考虑函数 $\varphi(x)=f(x)-\mathrm{e}^{-x}$,计算 $\varphi'(x)$,并利用 $\varphi(x)$ 的单调性.)

十二、方程的通解为 $k(1,2,1)^{\mathrm{T}}+\left(0,0,-\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$,其中 k 为任意常数.

十三、$a=15$, $b=5$.

2001 年真题参考答案

一、填空题

(1) $-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.　(2) $x-2y+2=0$.　(3) $\dfrac{\pi}{8}$.　(4) $y\arcsin x=x-\dfrac{1}{2}$.　(5) -2.

二、选择题

(1) B.　(2) B.　(3) C.　(4) A.　(5) D.

三、$\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)+C$,其中 C 为任意常数.

四、$f(x)=e^{\frac{x}{\sin x}}$. $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点,$x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 都是 $f(x)$ 的无穷间断点.

五、9.

六、$f(x)=(x+1)e^x-1$.

七、$\dfrac{1+e^\pi}{1+\pi}$.

八、(1) 曲线 L 的方程为 $y=\dfrac{1}{4}-x^2$.

(2) 所求切线为 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{1}{3}$.

九、6 小时.

十、(1) $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2$,其中 $\xi\in(0,x)$.

(2) 证明略.

十一、$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

十二、当 $t\neq\pm1$ 时, $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

2002 年真题参考答案

一、填空题

（1）-2.　（2）1.　（3）$y=\sqrt{x+1}$.　（4）$\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$.　（5）4.

二、选择题

（1）D.　（2）D.　（3）C.　（4）B.　（5）A.

三、切线方程：$y=x+\dfrac{5}{4}-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. 法线方程：$y=-x-\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

四、$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{2}+x^2-\dfrac{1}{2}, & -1\leqslant x<0,\\ \ln\dfrac{e^x}{e^x+1}-\dfrac{x}{e^x+1}+\ln 2-\dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

五、$f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$.

六、$y=x-\dfrac{75}{124}x^2$ 为所求解.

七、2 米.

八、证明略.（可用数学归纳法证明数列$\{x_n\}$有界，再证明数列$\{x_n\}$单调增，从而由单调有界准则可知数列极限存在. 等式两边求极限解代数方程得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{3}{2}$.）

九、证明略.（分别证明左右两个不等式.）

十、证明略.（可用洛必达法则）

十一、（1）证明略.

（2）$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

十二、方程组的通解为 $k(1,-2,1,0)^T+(0,3,0,1)^T$，其中 k 为任意常数.

2003 年真题参考答案

一、填空题

(1) -4.　(2) $x-y=0$.　(3) $\dfrac{(\ln 2)^n}{n!}$.　(4) $\dfrac{1}{4a}(e^{4\pi a}-1)$.　(5) 3.　(6) $\dfrac{1}{2}$.

二、选择题

(1) D.　(2) B.　(3) A.　(4) C.　(5) B.　(6) D.

三、$a=-1$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. $a=-2$ 时, $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

四、$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=9}=-\dfrac{e}{16(1+2\ln 2)^2}$.

五、$\dfrac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C$,其中 C 为任意常数.

六、(1) $y''-y=\sin x$.

(2) $y(x)=e^x-e^{-x}-\dfrac{1}{2}\sin x$.

七、当 $k<4$ 时,两曲线无交点;当 $k=4$ 时,两曲线只有一个交点;当 $k>4$ 时,两曲线有两个交点.

八、(1) 曲线方程为 $x^2+2y^2=1$.

(2) 曲线弧长为$\dfrac{\sqrt{2}}{4}l$.

九、(1) $t=\varphi^2(y)-4$.

(2) $x=2e^{\frac{\pi}{6}y}$.

十、(1) 证明略. (可证明 $f(a)=0$ 以及 $f(x)>f(a)$.)

(2) 证明略. (可利用柯西中值定理.)

(3) 证明略. (可利用拉格朗日中值定理.)

十一、$a=0$, $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&-2\\1&0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}6&&\\&6&\\&&-2\end{pmatrix}$.

十二、证明略. (三条平面直线交于一点等价于联立三条直线方程所得二元一次线性方程组有唯一解,可利用非齐次线性方程组有唯一解的充分必要条件.)

2004 年真题参考答案

一、填空题

(1) 0.　(2) $(-\infty, 1)$.　(3) $\frac{\pi}{2}$.　(4) 2.　(5) $y=\frac{1}{5}x^3+\sqrt{x}$.　(6) $\frac{1}{9}$.

二、选择题

(7) B.　(8) C.　(9) B.　(10) C.　(11) A.　(12) D.　(13) D.　(14) A.

三、解答题

(15) $-\frac{1}{6}$.

(16) (Ⅰ) $f(x)=kx(x+2)(x+4)$.

(Ⅱ) 当 $k=-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(17) (Ⅰ) 证明略. ($f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3}{2}\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t \xlongequal{t=u+\pi} \int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(u+\pi)|\,\mathrm{d}u=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\,\mathrm{d}u$ $=f(x)$.)

(Ⅱ) $[2-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

(18) (Ⅰ) $\frac{S(t)}{V(t)}=2$.

(Ⅱ) 1.

(19) 证明略. (考虑函数 $\varphi(x)=\ln^2 x-\frac{4}{\mathrm{e}^2}x$，计算 $\varphi'(x)$，并利用 $\varphi(x)$ 的单调性.)

(20) 1.05 km.

(21) $\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+y\mathrm{e}^{xy}f_2'$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-2yf_1'+x\mathrm{e}^{xy}f_2'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-4xyf_{11}''+2(x^2-y^2)\mathrm{e}^{xy}f_{12}''+xy\mathrm{e}^{2xy}f_{22}''+\mathrm{e}^{xy}(1+xy)f_2'.$$

(22) 当 $a=0$ 时，方程组有非零解，其通解为 $\boldsymbol{x}=k_1(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,0,1,0)^{\mathrm{T}}+k_3(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

当 $a=-10$ 时，方程组也有非零解，其通解为 $\boldsymbol{x}=k(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$，其中 k 为任意常数.

(23) 当 $a=-2$ 和 $a=-\frac{2}{3}$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有二重特征值，当 $a=-2$ 时，$\boldsymbol{A}$ 可相似对角化，当 $a=-\frac{2}{3}$ 时，$\boldsymbol{A}$ 不可相似对角化.

2005 年真题参考答案

一、填空题

(1) $-\pi dx$.　(2) $y=x+\frac{3}{2}$.　(3) $\frac{\pi}{4}$.　(4) $y=\frac{x}{3}\left(\ln x-\frac{1}{3}\right)$.　(5 $\frac{3}{4}$.　(6) 2.

二、选择题

(7) C.　(8) A.　(9) A.　(10) D.　(11) B.　(12) D.　(13) B.　(14) C.

三、解答题

(15) $\frac{1}{2}$.

(16) 所求曲线方程为 $x=\ln y+\frac{1}{2y}-\frac{1}{2}$.

(17) 20.

(18) $y=2x+\sqrt{1-x^2}$.

(19) (Ⅰ) 证明略.(考虑函数 $g(x)=f(x)+x-1$,可利用介值定理.)

(Ⅱ) 证明略.(可利用拉格朗日中值定理.)

(20) $f(x,y)$ 在椭圆域 D 上的最大值为 3,最小值为 -2.

(21) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$.

(22) $a=1$.

(23) 当 $k\neq 9$ 时,$\boldsymbol{x}=k_1(1,2,3)^{\mathrm{T}}+k_2(3,6,k)^{\mathrm{T}}$,其中 k_1, k_2 为任意常数. 当 $k=9$ 时,若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2,则通解为 $\boldsymbol{x}=k_1(1,2,3)^{\mathrm{T}}$,其中 k_1 为任意常数;若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 1,则通解为 $\boldsymbol{x}=k_1(-b,a,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-c,0,a)^{\mathrm{T}}$,其中 k_1, k_2为任意常数.

2006 年真题参考答案

一、填空题

(1) $y=\frac{1}{5}$.　(2) $\frac{1}{3}$.　(3) $\frac{1}{2}$.　(4) $y=Cxe^{-x}$,其中 C 为任意常数.　(5) $-e$.　(6) 2.

二、选择题

(7) A.　(8) B.　(9) C.　(10) D.　(11) C.　(12) D.　(13) A.　(14) B.

三、解答题

(15) $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{2}{3}$, $C=\frac{1}{6}$.

(16) $-\frac{\arcsin e^x}{e^x}+\ln(1-\sqrt{1-e^{2x}})-x+C$,其中 C 为任意常数.

(17) $\frac{\pi}{2}\ln 2$.

(18) (Ⅰ) 证明略.(可利用数学归纳法证明$\{x_n\}$单调下降且有界.)

(Ⅱ) $e^{-\frac{1}{6}}$.

(19) 证明略.(考虑函数 $f(x)=x\sin x+2\cos x+\pi x$, $x\in[0,\pi]$,计算 $f'(x)$,证明 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调增加.)

(20) (Ⅰ) 证明略.

(Ⅱ) $f(u)=\ln u$.

(21) (Ⅰ) L 是凸曲线.

(Ⅱ) 切点为 $(2,3)$,切线方程为 $y=x+1$.

(Ⅲ) $\frac{7}{3}$.

(22) (Ⅰ) 证明略.(分别证明 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$ 和 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$.)

(Ⅱ) $a=2$, $b=-3$,通解为 $\boldsymbol{x}=k_1(-2,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(4,-5,0,1)^{\mathrm{T}}+(2,-3,0,0)^{\mathrm{T}}$,其中 k_1, k_2 为任意常数.

(23) (Ⅰ) $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0,0,3,对应于特征值 0 的全体特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$,其中 k_1, k_2 为不全为零的任意常数,对应于特征值 3 的全体特征向量为 $k_3(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,其中 k_3 为任意非零常数.

(Ⅱ) $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵,满足 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$.

2007 年真题参考答案

一、选择题

(1)B.　(2)A.　(3)C.　(4)D.　(5)D.　(6)D.　(7)C.　(8)B.　(9)A.　(10)B.

二、填空题

(11) $-\frac{1}{6}$.　(12) $1+\sqrt{2}$.　(13) $\frac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}$.

(14) $y=C_1 e^x + C_2 e^{3x} - 2e^{2x}$,其中 C_1, C_2 为任意常数.

(15) $-\frac{2y}{x}f'_1+\frac{2x}{y}f'_2$.　(16)1.

三、解答题

(17) $f(x)=\ln(\sin x+\cos x)$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

(18) (Ⅰ) $V=\frac{\pi a^2}{(\ln a)^2}$.

(Ⅱ) $a=e$ 为 $V(a)$ 的最小值点,最小值为 πe^2.

(19) $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}$.

(20) $\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=0}=0$, $\left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=0}=1$.

(21) 证明略.

(22) $\frac{1}{3}+4\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$.

(23) 当 $a=1$ 时, $\boldsymbol{x}=k(1,0,-1)^T$,其中 k 为任意常数,是方程组①和②的公共解;当 $a=2$ 时, $\boldsymbol{x}=(0,1,-1)^T$ 是方程组①和②的唯一公共解.

(24) (Ⅰ) 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 -2 的特征向量为 $k_1(1,-1,1)^T$,其中 k_1 为任意非零常数;矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 1 的特征向量为 $k_2(1,1,0)^T+k_3(-1,0,1)^T$,其中 k_2, k_3 为不全为零的常数.

(Ⅱ) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$.

2008 年真题参考答案

一、选择题

(1)D. (2)C. (3)D. (4)A. (5)B. (6)A. (7)C. (8)D.

二、填空题

(9)2. (10)$x(-e^{-x}+C)$,其中 C 为任意常数. (11) $y=x+1$. (12) $(-1,-6)$.

(13) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2-1)$. (14) -1.

三、解答题

(15) $\frac{1}{6}$.

(16) $e^{x}(x+1)$.

(17) $\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}$.

(18) $\frac{19}{4}+\ln 2$.

(19) $f(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$, $x\in[0,+\infty)$.

(20) 证明略.

(21) 最大值 72,

最小值 6.

(22) (Ⅰ) 证明略.

(Ⅱ)$a\neq 0$ 时,方程组有唯一解, $x_1=\frac{n}{(n+1)a}$.

(Ⅲ)$a=0$ 时,方程组有无穷多解,通解为 $\boldsymbol{x}=k(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}+(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$,其中 k 为任意常数.

(23) (Ⅰ) 证明略.

(Ⅱ) $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

2009 年真题参考答案

一、选择题

(1)C.　(2)A.　(3)D.　(4)C.　(5)B.　(6)D.　(7)B.　(8)A.

二、填空题

(9)$y=2x$.　(10)-2.　(11)0.　(12)-3.　(13)$e^{-\frac{2}{e}}$.　(14)2.

三、解答题

(15) $\frac{1}{4}$.

(16) $x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})-\frac{\sqrt{x}}{2(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}-C$,其中 C 为任意常数.

(17) $dz=(f'_1+f'_2+yf'_3)dx+(f'_1-f'_2+xf'_3)dy$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'_3+f''_{11}+(x+y)f''_{13}-f''_{22}+(x-y)f''_{23}+xyf''_{33}.$$

(18) $\frac{17\pi}{6}$.

(19) $-\frac{8}{3}$.

(20) $y(x)=\begin{cases}\sqrt{\pi^2-x^2}, & x\in(-\pi,0),\\ \pi\cos x+\sin x-x, & x\in[0,\pi).\end{cases}$

(21) 证明略.

(22) (Ⅰ) 满足 $A\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=k_1(1,-1,2)^T+(0,0,1)^T$,其中 k_1 为任意常数;满足 $A^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_3$ 为 $\boldsymbol{\xi}_3=k_2(-1,1,0)^T+k_3(0,0,1)^T+\left(-\frac{1}{2},0,0\right)^T$,其中 k_2, k_3 为任意常数.

(Ⅱ) 证明略.

(23) (Ⅰ) a, $a-2$, $a+1$.

(Ⅱ) $a=2$.