张宇考研数学题源探析经典1000题勘误汇总

数学一

1.16 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\tan\frac{\pi x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

1.16 【解析】原式 $=\exp\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\tan\frac{\pi x}{1+2x}\right)}{x}\right\}$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to+\infty}\frac{\sec^2\frac{\pi x}{1+2x}}{\tan\frac{\pi x}{1+2x}}\cdot\frac{\pi}{(1+2x)^2}\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2\pi}{(1+2x)^2}}{\sin\frac{2\pi x}{1+2x}}\right\}$$

$x\to+\infty$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{8\pi}{(1+2x)^3}}{\cos\frac{2\pi x}{1+2x}\cdot\frac{2\pi}{(1+2x)^2}}\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{1+2x}\right\}=e^0=1.$$

1.17 【解析】$\lim\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(\sin x)-\ln x}{1-\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2x}}$

1.21 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$.

1.22 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3+\frac{x}{2}-\tan\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$.

1.21 【解析】原式 $\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\sqrt[6]{1+t}-\sqrt[6]{1-t}}{t}$

$t\to0^+$

$\left[1+\frac{1}{\ }t+o(t)\right]-\left[1-\frac{1}{\ }t+o(t)\right]$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\left[1 + \cdots 6 \cdots\right]\left[\cdots 6 \cdots\right]}{t} = \frac{1}{3}$$

取 $a_n = n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 > 0$，但 $\{a_n\}$ 无界，排除(A)；

取 $a_n = 1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 > 0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$，排除(B)；

取 $a_n = n - (-1)^n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 > 0$，但 $\{a_n\}$ 不单调，排除(D)。

1.73 (A) 【解析】因 $x_n > 0$，所以数列 $\{x_n\}$ 有下界。又 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} < 1$，由数列极限的保号性可知，存在正整数 N，当 $n > N$ 时，$\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$，即当 $n > N$ 时数列 $\{x_n\}$ 是单调减少的，故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 是存在的。结合极限的运算法则，通过反证法易知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$。

【注】① $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ 与 $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ 之间的区别，前者从第 N 项开始满足 $x_{n+1} < x_n$，而后者从指定项（默认第一项）开始满足。但从考查极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 的角度而言，两个条件没有本质上的区别。

② 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 2$，令 $u_n = \frac{1}{x_n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{2}$ 2，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，利用无穷小与无穷大之间的关系，知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$。

③ 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 可能存在，也可能不存在。如当 $x_n = \frac{1}{n}$ 时存在，当 $x_n = n$ 时不存在。

1.74 (B) 【解析】① 对于(B)，若单调数列 $\{a_n\}$ 有界，则极限存在，记 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+a_n^2} =$

$x \to (-1)^+$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{x(x-1)}{x(x-1)(x+1)} = -\infty,$$

故 $x = -1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，为无穷间断点。

1.94【解析】(1) 因为

$$\lim_{x\to 0} A(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\exp\left\{\frac{1}{x}\ln\frac{a^x + b^x}{2}\right\}$$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{a^x + b^x}\right\}$$

$$= \exp\left\{\frac{\ln a + \ln b}{2}\right\} = \sqrt{ab},$$

所以，当 $c = \sqrt{ab}$ 时，$A(x)$ 在 $x = 0$ 处连续。

(2) 易知 $A(1) = \frac{a+b}{2}$，$A(-1) = \frac{2ab}{\cdots}$，$\lim A(\cdots)$

$$a+b,\ \lim_{x\to 0}A(x)=\sqrt{ab}\text{，而}$$

$$\lim_{x\to+\infty}A(x)=\lim_{x\to+\infty}2^{-\frac{1}{x}}\max\{a,b\}\left[1+\left(\frac{\min\{a,b\}}{\max\{a,b\}}\right)^{x}\right]^{\frac{1}{x}}$$
$$=\max\{a,b\},$$

同理可求得 $\lim\limits_{x\to-\infty}A(x)=\min\{a,b\}$，故所考虑的五者大小关系为

$$\max\{a,b\}\geqslant\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\geqslant\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\geqslant\min\{a,b\},$$

或 $\lim\limits_{x\to+\infty}A(x)\geqslant A(1)\geqslant\lim\limits_{x\to0}A(x)\geqslant A(-1)\geqslant\lim\limits_{x\to-\infty}A(x)$.

综上可得，当 $a=0,b=1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 是连续函数.

1.107【解析】考虑函数无定义的点，间断点有 $x=-2,-1,0,1$.

在点 $x_1=-2$ 处，由 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+1}{|x+1|(x^2-x)}=-\dfrac{7}{6}$，可知 $f(x)$ 在点 $x_1=-2$ 的半径小于 1 的去心邻域内有界；同时，任一半径小于 1 的去心邻域内 $f(x)$ 的函数值无限振荡，振幅不趋于 0，所以 $x_1=-2$ 是 $f(x)$ 的振荡间断点.

在点 $x_2=-1$ 处，由于 $\dfrac{x^3+1}{|x+1|(x^2-x)}=\dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{|x+1|(x^2-x)}$ → ± $\dfrac{3}{2}$，在点 $x_2=-1$ 的半径小于 1 的去心邻域内有界；而 $\lim\limits_{x\to-1}\sin\left(\dfrac{|x-1|}{x+2}\pi\right)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=0$，从而可知 $x_2=-1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

在点 $x_3=0$ 处，由于 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$，所以 $x_3=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点.

在点 $x_4=1$ 处，由于 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\dfrac{\pi}{3}$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $x_4=1$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

间断点.

1.101【解析】因

$$f(x)=\begin{cases}0, & x>0,\\ \dfrac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{1}{1+x}}{x^2}, & x<0\text{，且 }x\neq-1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{1}{1+x}}{x^2}=\frac{\pi}{4}\cdot\lim_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\xlongequal{-\frac{1}{x}=t}\frac{\pi}{4}\cdot\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2}{e^t}=0=\lim_{x\to0^+}f(x),$$

$=0$ 为可去间断点.

又
$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{1}{1+x}}{x^2}=\frac{\pi}{2e},\quad\lim_{x\to(-1)^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{1}{1+x}}{x^2}=-\frac{\pi}{2e},$$

$=-1$ 为跳跃间断点.

2.3 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，在区间 $[0,2]$ 上，$f(x)=x(x^2-4)$，假若对任意的 x 都满足 $f(x)=kf(x+2)$，其中 k 为常数.

(1) 写出 $f(x)$ 在 $[-2,0)$ 上的表达式；

$\left(-\dfrac{\pi}{2a},\dfrac{\pi}{2a}\right)$

(2) 问 k 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导？

2.4 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且 $f'(0)=a(a\neq 0)$，又对任意的 $x,y\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$，求 $f(x)$.

$(a>0)$

2.5 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且对任意的 $x,x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{f(\Delta x)+f(x)}{1-f(\Delta x)f(x)}-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)[1+f^2(x)]}{\Delta x[1-f(x)f(\Delta x)]}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1+f^2(x)}{1-f(x)f(\Delta x)}$$

$$=f'(0)[1+f^2(x)],$$

所以 $\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}=a$，即

$$\frac{\mathrm{d}[\arctan f(x)+C_1]}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}(ax+C_2)}{\mathrm{d}x},$$

故有 $\arctan f(x)+C_1=ax+C_2$，即 $\arctan f(x)=ax+C$.

由 $f(0)=0$，得 $C=0$，所以有 $f(x)=\tan ax(a\neq 0)$. $>$

2.5 【解析】对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

2.79 【解析】① 定义域. $\begin{cases}4x^2+x\geq 0,\\ 2+\dfrac{1}{x}>0\end{cases}\Rightarrow x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup(0,+\infty)$.

② 铅直渐近线. $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)}\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)=-\infty\Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ 为铅直渐近线；

$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{4x^2+x}\ln(2x-1)-\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{4x^2+x}\ln x=0\Rightarrow x=0$ 不是铅直渐近线.

$+$

③ 水平渐近线. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$，无水

线.

④ 斜渐近线. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)=2\ln 2=a\neq 0$.

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-2\ln 2\cdot x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4+\frac{1}{x}}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-2\ln 2\right]\cdot x$$

2.86 曲线 $y=y(x)$ 可表示为 $x=t^3-t,y=t^4+t$，t 为参数. 证明：

(1) $y=y(x)$ 在 $t=0$ 处为拐点；

(2) $g(x)=\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$ 在 $t=0$ 处取得极大值.

t

2.86 【解析】(1) 当 $t=0$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\neq 0$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{4t^3+1}{3t^2-1},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{6t(2t^3-2t-1)}{(3t^2-1)^3}.$$

$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=0$，且 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 在 $t=0$ 两侧异号，故曲线 $y=y(x)$ 在 $t=0$ 处为拐点.

t $\quad \cdots=2-6t^2+8t^3+9t^4+16t^6$.

(2) $g^2(t) = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (3t^2-1)^2 + (4t^3+1)^2$,

$$\frac{dg^2}{dt} = -12t + 24t^2 + 36t^3 + 96t^5,\ \frac{d^2g^2}{dt^2} = -12 + 48t + 108t^2 + 480t^4,$$

$\left.\frac{dg^2}{dt}\right|_{t=0} = 0$, $\left.\frac{d^2g^2}{dt^2}\right|_{t=0} = -12 < 0$, 可知 $g(0)$ 在 $t=0$ 处取极大值. t

…… $y'' = -\sin x$, 则曲线在任意一点处的曲率为

(A)$[0,1]$　　(B)$[1,2]$　　(C)$[2,3]$　　(D)$[3,4]$

2.105 设 $f(x)$ 二阶可导, $f''(x) < 0$, $f'(0) \leqslant \frac{1}{3}$, $f(0) = 0$, $f(1) = \frac{1}{2}$, 并设 $0 < x_0 < 1$. 且 $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 1,2,\cdots$.

(1) 证明 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少;

(2) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

$$\left[\frac{f(x)}{x}\right]' = \frac{f'(x)\cdot x - f(x)}{x^2} = \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x},\ 0 < \xi < x,$$

$$= \frac{f'(x)\cdot x - f'(\xi)\cdot x}{x^2}$$

由 $f''(x) < 0$, 有 $f'(x)$ 单调减少, 故 $f'(x) < f'(\xi)$, $\left[\frac{f(x)}{x}\right]' < 0$, $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少.

(2) 由(1), 当 $0 < x < 1$ 时, $\frac{f(x)}{x} > \frac{f(1)}{1} = \frac{1}{2}$, 即 $f(x) > \frac{1}{2}x$.

于是 $x_{n+1} = f(x_n) > \frac{1}{2}x_n > \left(\frac{1}{2}\right)^2 x_{n-1} > \cdots > \left(\frac{1}{2}\right)^n x_1$, 故 $\{x_n\}$ 有下界;

又 $x_{n+1} = f(x_n) = f(x_n) - f(0) = f'(\xi_n)\cdot x_n$, 其中 $0 < \xi_n < x_n$, $f'(\xi_n) < f'(0) \leqslant \frac{1}{3}$, 故 $x_{n+1} \leqslant \frac{1}{3}x_n < x_n$, 得 $\{x_n\}$ 单调减少.

由单调有界准则, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

2.106 【解析】 $\arctan a - \arctan 0 = \frac{a}{1+\xi^2}$, 得 $\xi^2 = \frac{a - \arctan a}{\arctan a}$. 故

$$\lim_{a\to 0}\frac{\xi^2}{a^2} = \lim_{a\to 0}\frac{a - \arctan a}{a^2 \arctan a} = \lim_{a\to 0}\frac{a - \arctan a}{a^3} = \frac{1}{3},$$

于是 $\lim\limits_{a\to 0^+}\frac{\xi}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$F(a) = \int_b^a \frac{1}{f(t)}dt < 0,\ F(b) = \int_a^b f(t)dt > 0,$$

故 $F(x)$ 在 (a,b) 内有根. 零点

又 $F'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} > 0$, 所以 $F(x)$ 单调增加, 它在 (a,b) 内最多只有一个根. 应选(B).

3.78 (D) **【解析】** 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处切线方程为 $y = 1 + 2x$. 选项(D) 中函数记 $y = F(x)$, 由 $F(0) = 1$, $F'(0) = 2f(0) = 2$, 知曲线 $y = F(x)$ 在点 $(0,1)$ 处切线方程也为 $y = 1 + 2x$. 故应选(D).

3.99 (C) 【解析】$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x^{\frac{a+1}{2}}}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\sin\frac{1}{x^a}\right)}{x^b \ln\cos\frac{1}{x}}\mathrm{d}x = I_1 + I_2$.

对于 I_1，盯着 $x\to 0^+$，此时 $\arctan x \sim x$，故 I_1 与 $\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{a+1}{2}-1}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{a-1}{2}}}\mathrm{d}x$ 同敛散，于是要求 $\frac{a-1}{2} < 1$，即 $a < 3$.

对于 I_2，盯着 $x \to +\infty$，此时

$$\ln\left(1+\sin\frac{1}{x^a}\right) \sim \sin\frac{1}{x^a} \sim \frac{1}{x^a}, \ln\cos\frac{1}{x} = \ln\left(1+\cos\frac{1}{x}-1\right) \sim \cos\frac{1}{x} - 1 \sim -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2,$$

故 I_2 与 $\int_1^{+\infty} \frac{\frac{1}{x^a}}{x^b \cdot \frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{b+a-2}}\mathrm{d}x$ 同敛散，于是 $b+a-2>1$，即 $a+b>3$.

综上，$a<3$ 且 $a+b>3$，选(C).

3.116 如图 1-3-2 所示，阴影部分由曲线 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$，直线 $y=a(0<a<1)$，$x=\pi$ 以及 y 轴围成. 此图形绕直线 $y=a$ 旋转一周形成旋转体 S. 问 a 为何值时，S 有最小体积，S 有最大体积.

$\leq$

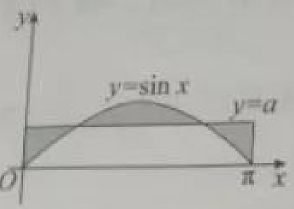


图 1-3-2

3.118 【解析】如图 1-3-7 所示，

图 1-3-6

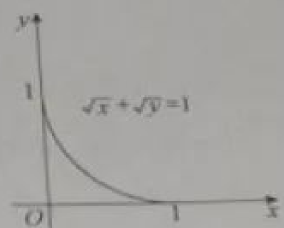


图 1-3-7

故

$$S = \int_0^1 (1-\sqrt{x})^2\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1-2x^{\frac{1}{2}}+x\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left(x - \frac{4}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

$\frac{3}{2}$

3.119 【解析】如图 1-3-8 所示，

$$S = \int_0^{2\pi} y\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} y(t)\cdot x'(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\mathrm{d}t$$

$$\left(\ldots 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{1}{\ldots}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi$$

$= \left(t - 2\sin t + \frac{\cdots}{2} + \frac{\cdots}{4}\sin 2t\right)\Big|_0 = 3\pi.$

3.120【解析】 因 $dx = -3\cos^2 t\sin t dt$，图形关于 x 轴，y 轴均对称，如图 1-3-9 所示，故

$$S = 4\int_0^1 y dx = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^3 t(-3\cos^2 t\sin t)dt$$
$$= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos^2 t dt = 12\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 t - \sin^6 t)dt$$
$$= 12\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \frac{3}{8}\pi.$$

3.121【解析】 如图 1-3-10 所示，

$$S = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}r^2 d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\theta^2 d\theta = \frac{4}{3}a^2\pi^3.$$

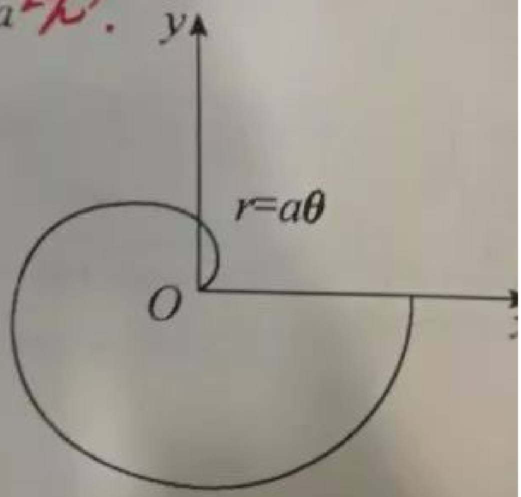


图 1-3-10

3.135【解析】 如图 1-3-14 所示，$y = \pm\sqrt{x^3 - x^4}(0 \leqslant x \leqslant 1)$ 平面图形关于 x 轴对称，……0，当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，平面图形的高 $y = 2\sqrt{x^3 - x^4}$，故

$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 x\cdot 2\sqrt{x^3 - x^4}dx}{\int_0^1 2\sqrt{x^3 - x^4}dx} = \frac{\int_0^1 x^{\frac{5}{2}}\cdot\sqrt{1-x}dx}{\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{1-x}dx},$$

其中，$\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{1-x}dx \xlongequal{x=\sin^2\theta} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cdot\cos\theta\cdot 2\sin\theta\cdot\cos\theta d\theta$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cdot\cos^2\theta d\theta = 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta d\theta\right)$$

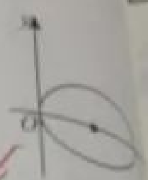


图 1-3-14

$$= 2\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{128}.$$

$$\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=\sin^2\theta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cdot\cos\theta\cdot 2\sin\theta\cdot\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cdot\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta\,\mathrm{d}\theta\right)$$

$$= 2\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{16}.$$

3.139 半径为 1 的球沉入水中，球的上顶与水平面齐平. 球与水的密度相同记为 ρ，重力加速度记为 g，现将球打捞出水，至少需做多少功？

3.140 一个均质的物体，高 4 m，水平截面面积是高度 h（从底部算起）的函数 $S=20+3h^2$. 已知物体的密度与水的密度同为 $10^3\ \mathrm{kg/m^3}$，此物体沉在水中，上表面与水面平齐，问将此物体打捞出水，至少需做功多少（设重力加速度 $g=10\ \mathrm{m/s^2}$）？

顶

$$\rho g\pi x^2\mathrm{d}y=(y+2)\cdot\rho g\pi[1-(y+1)^2]\mathrm{d}y,$$

故总功

$$W=\int_{-2}^{0}(y+2)\cdot\rho g\cdot\pi[1-(y+1)^2]\mathrm{d}y$$

$$=\rho g\cdot\pi\int_{-2}^{0}(2+y)(-y^2-2y)\mathrm{d}y$$

$$=\rho g\pi\cdot\left(-\frac{1}{4}y^4-\frac{4}{3}y^3-2y^2\right)\Big|_{-2}^{0}$$

$$=\rho g\pi\cdot\left(12-\frac{32}{3}\right)=\frac{4}{3}\rho g\pi.$$

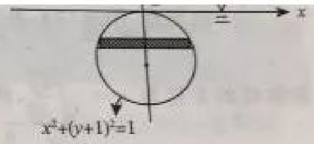
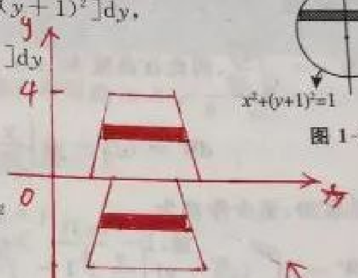


图 1-3-15



3.140【解析】 作垂直截面并建系，如图 1-3-16 所示，将 x 轴建在水面上，由于物体与水的密度相同，打捞时，物体在水下的行程不做功，物体出水后，阴影部分 $[y,y+\mathrm{d}y]$ 做功微元

$$\mathrm{d}W=(y+4)\rho g\cdot S(y)\cdot\mathrm{d}y,$$

故总功

$$W=\int_{-4}^{0}(y+4)\rho gS(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-4}^{0}(y+4)(20+3y^2)\times10^3\times10\mathrm{d}y$$

$$=2.24\times10^6(\mathrm{J}).$$

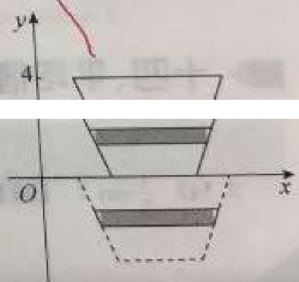


图 1-3-16

5.5【分析】首先画积分区域 D 的图形（如图 1-5-4），本题有三种方法可以用. 一种方法是利用

$$\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D+D_1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$D+D_1$ 是正方形区域比较容易积分，D_1 是半圆区域，可利用极坐标积分. 另一种方法是把原积分直接在直角坐标下化为先 x 后 y 的积分进行计算. 第三种方法是借助于形心公式计算.

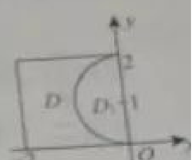


图 1-5-4

【解析】方法一

$$\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D+D_1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

而

$$\iint_{D+D_1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-2}^{0}\mathrm{d}x\int_0^2 y\mathrm{d}y=4.$$

$$\iint_{D_1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r^2\sin\theta\mathrm{d}r=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{8}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

于是$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4-\frac{\pi}{2}.$

y

方法二 $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}}y\mathrm{d}x=2\int_0^2 y\mathrm{d}\theta-\int_0^2 y\sqrt{2y-y^2}\mathrm{d}y$

$$=4-\int_0^2 y\sqrt{1-(y-1)^2}\mathrm{d}y.$$

令 $y-1=\sin t$，则$\int_0^2 y\sqrt{1-(y-1)^2}\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.$

于是$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4-\frac{\pi}{2}.$

6.17 曲面 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=4$ 上任一点的切平面在三个坐标轴上的截距的平方和为（　　）.

(A)48　　(B)64　　(C)36　　(D)16

x

6.18 以下 4 个平面方程：①$7x+5y+2z+10=0$，②$-7y-5y+2z-10=0$，③$7x-y+14z+$
$=0$，④$x-7y+14z-26=0$，是平面 $x+2y-2z+6=0$ 和平面 $4x-y+8z-8=0$ 的交角的
分面方程的是（　　）.

(A)①②　　(B)②③　　(C)②④　　(D)①④

$$=\frac{1}{3!}\left[\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right]^3.$$

7.10【解析】由于所给球体 Ω 的质量分布关于 z 轴对称，所以它的重心位于 z 轴上，而密度是

$$\rho=k\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

其中 k $(k>0)$ 是比例常数，因此可得

$$x_G=y_G=0,$$

$$z_G=\frac{\iiint\limits_\Omega kz\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_\Omega k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}.$$

采用球坐标计算这两个三重积分，将

$=5\pi a^4.$

7.35【解析】由题意 $u''_{xy}=u''_{yx}$，记 $P(x,y)=u'_x(x,y)+xy$，$Q(x,y)$
有连续一阶偏导数. 积分曲线如图 1-7-4 所示，故

$$I=\int_l[u'_x(x,y)+xy]\mathrm{d}x+u'_y(x,y)\mathrm{d}y$$

去掉圈

$$=\left(\oint_{\widehat{ABOA}}-\oint_{\overline{BO}}-\oint_{\overline{OA}}\right)[u'_x(x,y)+xy]\mathrm{d}x+u'_y($$

其中 $\oint_{\widehat{ABOA}}[u'_x(x,y)+xy]\mathrm{d}x+u'_y(x,y)\mathrm{d}y$

$$\iint_D \left\{\frac{\partial}{\partial x}u_x'(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}[u_x'(x,y)+xy]\right\}d\sigma$$

$$= -\iint_D (u''_{yx} - u''_{xy} - x)d\sigma$$

$$= \int_0^\pi dx\int_0^{\frac{\sin x}{x}} x dy = \int_0^\pi \sin x dx = 2,$$

$$\oint_{\overline{BO}} [u_x'(x,y)+xy]dx + u_y'(x,y)dy$$

去掉圈 $= \int_\pi^0 u_x'(x,0)dx = u(x,0)\Big|_\pi^0 = u(0,0)-\pi,$

$$\oint_{\overline{OA}} [u_x'(x,y)+xy]dx + u_y'(x,y)dy = \int_0^1 u_y'(0,y)dy = u(0,y)\Big|_0^1 = 1-u(0,0),$$

于是原式 $= 2-[u(0,0)-\pi]-[1-u(0,0)] = \pi+1.$

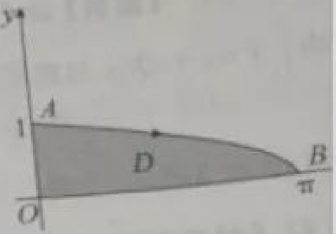


图 1-7-4

7.36 2 【解析】将边界方程代入被积函数，于是有

9.19 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$(　　).

(A) 收敛 不　　(B) 发散　　(C) 条件收敛　　(D) 绝对收敛

20 判别级数 $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$ 的敛散性.

但级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$ 发散. 因为级数

9.23 【解析】$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} = \frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$ 是交错级数，但不满足莱布

件. 因为 $|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}$，所以由比较审敛法知，$\sum_{n=2}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}$

又因为 $S_{2n} = \sum_{k=2}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+(-1)^k}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\cdots\right)$

由于上式每个括号都小于 0，所以 $\{S_{2n}\}$ 单调递减，再由

$$S_{2n} > \left(\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2n+2}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n+2}}-\cdots$$

知 $\{S_{2n}\}$ 单调递减有下界，故 $\{S_{2n}\}$ 收敛，记 $\lim_{n\to\infty}S_{2n} = S$，易知 $\lim_{n\to\infty}u_n = 0$，则

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n}+u_{2n+2}) = S+0 = S.$$

所以，原级数的部分和数列 $\{S_{2n}\}$ 收敛，从而级数收敛，所以原级数条件收敛

2

9.26 【解析】(1) $f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n+1}\right) = f'(\xi_n)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = f'(\xi_n)\frac{1}{n(n+1)}$，故

$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right| \leqslant \frac{M}{n^2},$$

其中 $|f(x)|\leqslant M$，M 是正常数，所以 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]$ 绝对收敛.

(2)
$$S_n=\sum_{i=2}^{n}\left[f\left(\frac{1}{i}\right)-f\left(\frac{1}{i+1}\right)\right]=f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

-1

由于级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]$ 绝对收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$

-1

$\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 存在.

$$x^2S(x)=-\frac{x}{3}+\ln 3-\ln(3-x),$$

$$S(x)=-\frac{1}{3x}+\frac{\ln 3-\ln(3-x)}{x^2}\ (x\neq 0).$$

由 $S(x)=\frac{1}{18}+\frac{x}{27}+\cdots$ 可知 $S(0)=\frac{1}{18}$.

81

故所求级数的和函数为

$$S(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{3x}+\dfrac{\ln 3-\ln(3-x)}{x^2}, & x\in[-3,0)\cup(0,3\\ \dfrac{1}{18}, & x=0.\end{cases}$$

9.51【解析】 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n(n+1)}{2^n}$ 的形式，考查幂级数：

212.【解析】 已知条件是 $A\sim B$，故应当从相似的必要条件来确定参数.

由 $A\sim B$ 知 A 与 B 有相同的迹，有 $1+1+0=2+1+c$，得 $c=-1$.

又相似矩阵有相同的特征值，而

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1).$$

λ

所以矩阵 B 的特征值是 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=-1$. 那么

$$|E-B|=\begin{vmatrix}-1 & -3 & -3\\ -2 & 0 & 0\\ -a & -b & 2\end{vmatrix}=2(-6-3b)=0.$$

$$|2E-B|=\begin{vmatrix}0 & -3 & -3\\ -2 & 1 & 0\\ -a & -b & 3\end{vmatrix}=-3(a+2b+6)=0.$$

2

解得 $a=-0$,$b=-2$. 因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个不同的特征值,故 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化,
求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量为

$$\lambda_1=1,\boldsymbol{x}_1=[1,2,0]^{\mathrm{T}};\lambda_2=2,\boldsymbol{x}_2=[1,0,-1]^{\mathrm{T}};\lambda_3=-1,\boldsymbol{x}_3=[1,0$$

那么令 $\boldsymbol{P}_1=[\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3]$,有 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & -1\end{bmatrix}$,类似地,对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 求出特

$$\lambda_1=1,\boldsymbol{y}_1=[0,1,-1]^{\mathrm{T}};\lambda_2=2,\boldsymbol{y}_2=[1,2,-2]^{\mathrm{T}};\lambda_3=-1,\boldsymbol{y}_3=[1,$$

令 $\boldsymbol{P}_2=[\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\boldsymbol{y}_3]$,有 $\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & -1\end{bmatrix}$,

于是 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2$,故 $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\boldsymbol{B}$. 令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}$,则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$,其中

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & -2 & 0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -3\\ -4 & -4 & -6\\ -1 & -3 & -3\end{bmatrix}.$$

213.【解析】 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-8 & 2 & 2\\ 2 & \lambda-5 & 4\\ 2 & 4 & \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-9)^2=0$

83. 设随机变量 X,Y 相互独立,且 $P\{X=0\}=P\{X=1\}$

$Z=XY$ 的分布函数.

征

四、数字特证

84. 现有 10 张奖券,其中 8 张为 2 元的,2 张为 5 元的. 今从

为(　　).

(A)6　　(B)7.8　　(C)9

80.【解析】 方法一　$P\{X_1=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\}=P\{X_1\leqslant\min\{X_2,X_3,\cdots,X_n\}$

$\min\{X_2,X_3,\cdots,X_n\}$,则有

1−

$$F_Y(y)=[1-F_{X_2}(y)][1-F_{X_3}(y)]\cdots[1-F_{X_n}(y)]$$

$$=\begin{cases}e^{-(\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_n)y}, & y\geqslant 0,\\ 0, & y<0.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}(\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_n)e^{-(\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_n)y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

又因为(X_1,Y)的概率密度为$f(x,y)=f_1(x)f_Y(y)$，所以

$$P\{X_1\leqslant\min\{X_2,X_3,\cdots,X_n\}\}=\iint\limits_{x<y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{+\infty}\lambda_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}(\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_n)\mathrm{e}^{-(}$$

178.【解析】由题意得似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}\dfrac{x_1\cdots x_n}{\theta^{2n}}\mathrm{e}^{-\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{2\theta^2}}, & x_1,x_2,\cdots,x_n>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

取对数得

$$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-2n\ln\theta-\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{2\theta^2},$$

令$\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=-2n\cdot\dfrac{1}{\theta}+\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)\theta^{-3}=0$，解得$\hat{\theta}=\sqrt{\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2}$，相互独立 故$\hat{\theta}$为$\theta$的最大似然估计量.

数学二

1.16 求$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\tan\dfrac{\pi x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

$=(\ln a)^2$.

1.12【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left(\cot x-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{3x}=-\frac{1}{3}.$$

1.13【解析】令$x=\dfrac{1}{t}$，有

$$\text{原式}=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt[3]{1+2t+t^3}-\mathrm{e}^t}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{3}(1+2t+t^3)^{-\frac{2}{3}}(2+3t^2)-\mathrm{e}^t}{1}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot1\cdot2-1=-\frac{1}{3}.$$

1.14【解析】$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+x^2-1+\mathrm{e}^{-x}}{x(1-\mathrm{e}^{-x})}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2-1+\mathrm{e}^{-x}}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1+2x-\mathrm{e}^{-x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{2+\mathrm{e}^{-x}}{2}=\frac{3}{2}.$$

1.15【解析】$\lim\limits_{x\to0^+}x^{\ln\left(\frac{\ln x-1}{\ln x+1}\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left(\frac{\ln x-1}{\ln x+1}\right)\ln x}$,

$$\lim_{x\to0^+}\ln x\ln\left(\frac{\ln x-1}{\ln x+1}\right)=\lim_{x\to0^+}\ln x\ln\left(1+\frac{-2}{\ln x+1}\right)$$
$$=\lim_{x\to0^+}\ln x\cdot\frac{-2}{\ln x+1}=-2.$$

所以$\lim\limits_{x\to0^+}x^{\ln\left(\frac{\ln x-1}{\ln x+1}\right)}=\mathrm{e}^{-2}$.

1.16【解析】原式 $=\exp\left\{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(\tan\dfrac{\pi x}{1+2x}\right)}{x}\right\}$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}\frac{\sec^2\dfrac{\pi x}{1+2x}}{\tan\dfrac{\pi x}{1+2x}}\cdot\frac{\pi}{(1+2x)^2}\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2\pi}{(1+2x)^2}}{\sin\dfrac{2\pi x}{1+2x}}\right\}$$

$x\to+\infty$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}\frac{-\dfrac{8\pi}{(1+2x)^3}}{\cos\dfrac{2\pi x}{1+2x}\cdot\dfrac{2\pi}{(1+2x)^2}}\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}\frac{4}{1+2x}\right\}=e^0=1.$$

1.17【解析】$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(\sin x)-\ln x}{1-\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2 x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}-\frac{x\sin x}{3x^2}}=e^{-\frac{1}{3}}.$

1.18【解析】$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x}{\cos 2x}-1\right)}{x^2}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\cos x}{\cos 2x}-1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2\cos 2x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin x+2\sin 2x}{2x}}=e^{\frac{3}{2}}.$

1.19【解析】$\lim\dfrac{\sin x-x\cos x}{\ldots}$ ……$x-\dfrac{x^3}{\ldots}+o(x^3)$ ……

1.17 求 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

1.18 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

1.19 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x-\sin x}$.

1.20 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{\left(\cos x-e^{\frac{x^2}{2}}\right)\sin\frac{x^2}{2}}$.

1.21 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$.

$x\to+\infty$

1.22 求 $\lim\left[\left(x^3+\dfrac{x}{\ldots}-\tan\dfrac{1}{\ldots}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\ldots\right.$

$$1.23\ \text{求}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x\sin^2 x}.$$

$$1.24\ \text{求}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x^2\sin\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}.$$

$$1.25\ \text{求}\lim_{x\to 0}\left[\frac{a}{x}-\left(\frac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right],\text{其中 } a$$

$$1.26\ \text{求}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}.$$

$$1.27\ \text{求}\lim\ \int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\,dt$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}=-\frac{1}{4}.$$

1.21 【解析】原式 $\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\sqrt[6]{1+t}-\sqrt[6]{1-t}}{t}$

$t\to 0^+$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\left[1+\frac{1}{6}t+o(t)\right]-\left[1-\frac{1}{6}t+o(t)\right]}{t}=\frac{1}{3}.$$

1.22 【解析】原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}-\tan\dfrac{1}{x}\cdot e^{\frac{1}{x}}\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$$

样的"事实陈述"，没什么意义．本题答案中出现了连续放缩法，属于较高要求的技能．本题是中等难度题．

1.75 (A) 【解析】因 $x_n>0$，所以数列 $\{x_n\}$ 有下界．又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{2}<1$，由数列极限的保号性可知，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<1$，即当 $n>N$ 时数列 $\{x_n\}$ 是单调减少的，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 是存在的．结合极限的运算法则，通过反证法易知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$．

【注】① $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<1$ 与 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<1$ 之间的区别，前者从第 N 项开始满足 $x_{n+1}<x_n$，而后者从指定项（默认第一项）开始满足．但从考查极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的角度而言，两个条件没有本质上的区别．

利用无穷小与无穷大之间的关

② 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=2$，令 $u_n=\frac{1}{x_n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{1}{2}$ 2，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，利用无穷小与无穷大关系，知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

③ 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 可能存在，也可能不存在. 如当 $x_n=\frac{1}{n}$ 时存在，当 $x_n=n$ 时不存在.

1.76 (B) 【解析】① 对于(B)，若单调数列 $\{a_n\}$ 有界，则极限存在，记 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+a_n^2}=$

故 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，为可去间断点.

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x(x-1)}{-x(x-1)(x+1)}=-1,$$

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，为跳跃间断点.

$x\to(-1)^+$

$$\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x(x-1)}{-x(x-1)(x+1)}=-\infty,$$

故 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，为无穷间断点.

1.98【解析】(1) 因为

$$\lim_{x\to0}A(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\exp\left\{\frac{1}{x}\ln\frac{a^x+b^x}{2}\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}\right\}$$

$$=\exp\left\{\frac{\ln a+\ln b}{2}\right\}=\sqrt{ab},$$

$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}F(x)=\lim\limits_{t\to0}\ \ldots\ 2\sin t$

故点 $x=-\frac{\pi}{2}$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点；而点列 $x_k=-k\pi-\frac{\pi}{2}(k=1,2,\cdots)$ 显然是函数的无穷间断点.

1.105【解析】因

$$f(x)=\begin{cases}0, & x>0,\\ \dfrac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{1}{1+x}}{x^2}, & x<0, \text{且 } x\neq-1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{1}{1+x}}{x^2}=\frac{\pi}{4}\cdot\lim_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\xlongequal{-\frac{1}{x}=t}\frac{\pi}{4}\cdot\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2}{e^t}=0=$$

故 $x=0$ 为可去间断点.

1.111

心邻域内有界；同时，任一半径小于 1 的去心邻域内 $f(x)$ 的函数值无限振荡，振幅不趋于 0，所以 $x_1=-2$ 是 $f(x)$ 的振荡间断点.

二大

在点 $x_2=-1$ 处，由于

$$\frac{x^3+1}{|x+1|(x^2-x)}=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{|x+1|(x^2-x)}\to\frac{3}{2},$$

在点 $x_2=-1$ 的半径小于 1 的去心邻域内有界；而 $\lim\limits_{x\to-1}\sin\left(\frac{|x-1|}{x+2}\pi\right)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=0$，从而可知 $x_2=-1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

在点 $x_3=0$ 处，由于 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$，所以 $x_3=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点.

在点 $x_4=1$ 处，由于 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\frac{\pi}{3}$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\frac{\pi}{3}$，所以 $x_4=1$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

2.1 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，$f'(1)=1$，求 $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^{10}-1}$.

2.2 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{e^{f(x)}-\cos x+\sin x}{x}\right]=0$，求 $f(0)$，并讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导？若可导，请求出 $f'(0)$.

2.3 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，在区间 $[0,2]$ 上，$f(x)=x(x^2-4)$. 假若对任意的 x 都满足 $f(x)=kf(x+2)$，其中 k 为常数.

(1) 写出 $f(x)$ 在 $[-2,0)$ 上的表达式；

(2) 问 k 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导？

$\left(-\frac{\pi}{2a},\frac{\pi}{2a}\right)$

2.4 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且 $f'(0)=a$ $(a\neq0)$，又对任意的 $x,y\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$，求 $f(x)$.

$(a>0)$

2.5 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且对任意的 $x,x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2),\ f(x)=1+xg(x),$$

其中 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=1$. 证明：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处可导.

2.6 设 $f(x)$ 定义在 $\mathbf{R}$ 上，对于任意的 x_1,x_2，有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant(x_1-x_2)^2$，求证：$f(x)$ 是常值函数.

2.4【解析】 由 $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$，令 $y=0$，得 $f(0)=0$，故

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\frac{f(\Delta x)+f(x)}{1-f(\Delta x)f(x)}-f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)[1+f^2(x)]}{\Delta x[1-f(x)f(\Delta x)]}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to0}\frac{1+f^2(x)}{1-f(x)f(\Delta x)}\\&=f'(0)[1+f^2(x)],\end{aligned}$$

所以 $\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}=a$，即

$$\frac{d[\arctan f(x)+C_1]}{dx}=\frac{d(ax+C_2)}{dx},$$

故有 $\arctan f(x)+C_1=ax+C_2$，即 $\arctan f(x)=ax+C$.

由 $f(0)=0$，得 $C=0$，所以有 $f(x)=\tan ax$ $(a\cancel{\neq}0)$. ?

2.5【解析】 对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}=0,$$

曲线 $y=f(x)$ 无斜渐近线.

2.85【解析】① 定义域. $\begin{cases}4x^2+x\geqslant 0,\\ 2+\dfrac{1}{x}>0\end{cases}\Rightarrow x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup(0,+\infty)$.

② 铅直渐近线. $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-}\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)=-\infty\Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ 为铅直渐近线;

$\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{4x^2+x}\ln(2x-1)-\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{4x^2+x}\ln x=0\Rightarrow x=0$ 不是铅直渐近线.

③ 水平渐近线. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$, 无水平渐近线.

④ 斜渐近线. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)=2\ln2=a\neq0$.

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-2\ln2\cdot x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4+\frac{1}{x}}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-2\ln2\right]\cdot x$$

$x=\dfrac{1}{\ldots}$

2.91 设某物体的温度 T 与时间 … $T=a(1-e\ldots)$ … 现将该物体放入 200 ℃ 的高温介质中.

其中 T 的单位是 ℃, t 的单位是 min.

(1) 若物体的初始温度是 20 ℃, 求 a 和 b;

(2) 若物体温度以 2 ℃/min 的速率开始上升, 求 k.

2.92 曲线 $y=y(x)$ 可表示为 $x=t^3-t$, $y=t^4+t$, t 为参数. 证明:

(1) $y=y(x)$ 在 $t=0$ 处为拐点;

(2) $g(\theta)=\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$ 在 $t=0$ 处取得极大值.

2.93 曲线 $y=\ln x$ 的最大曲率是(　　).

(A) $\dfrac{1}{3^{\frac{3}{2}}}$　　(B) $\dfrac{2}{3^{\frac{3}{2}}}$　　(C) $\dfrac{1}{3^{\frac{1}{2}}}$　　(D) $\dfrac{2}{3^{\frac{1}{2}}}$

2.94 设有曲线弧 $y=\sin x(0<x<\pi)$.

(1) 求出曲线弧的最小曲率半径;

(2) 求与曲线弧在曲率半径最小的点处相切且具有相同曲率和凹向的抛物线的方程.

2.95 曲线 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 在(1,1)处的曲率半径为________.

2.96 $y^2=4x$ 在原点处的曲率圆方程为________.

2.97 求曲线 $y=\ln x$ 上曲率最大的点, 并在该点附近用抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 近似代替…

【注】…

2.91【解析】(1) $T(0)=20$, 于是 $b=20$, 且当 $t\to+\infty$ 时, $T\to200$, 即 $a+b=200$, …

(2) $\dfrac{dT}{dt}=ake^{-kt}$, 代入 $\left.\dfrac{dT}{dt}\right|_{t=0}=2$, $a=180$, 可求得 $k=\dfrac{1}{90}$, 即 $T=180(1-e^{-\frac{t}{90}})+20$.

2.92【解析】(1) 当 $t=0$ 时, $\dfrac{dx}{dt}\neq0$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{4t^3+1}{3t^2-1},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6t(2t^3-2t-1)}{(3t^2-1)^3}.$$

$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=0$, 且 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 在 $t=0$ 两侧异号, 故曲线 $y=y(x)$ 在 $t=0$ 处为拐点.

(2) $g^2(\theta)=\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=(3t^2-1)^2+(4t^3+1)^2=2-6t^2+8t^3+9t^4+16t^6$.

$$\frac{dg^2}{dt}=-12t+24t^2+36t^3+96t^5,\ \frac{d^2g^2}{dt^2}=-12+48t+108t^2+480t^4,$$

$\left.\dfrac{d^2g^2}{dt^2}\right|_{t=0}=-12<0$, 可知 $g(\theta)$ 在 $t=0$ 处取极大值.

$\left.\frac{dg'}{dt}\right|_{t=0}=0,\left.\frac{d^2g}{dt^2}\right|_{t=0}=-12<0$,可知 g(0) ...

2.93 (D) 【解析】由题意,易得 $y'=\frac{1}{x},y''=-\frac{1}{x^2}$,由曲率公式,有

$$k=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}}=\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}},x>0.$$

$\frac{f(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{\ }{b-a}e^{\eta}$.

2.111 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上可导,$f(0)=0,|f'(x)|\leqslant|f(x)|$,则 $f(1)=$ ________.

2.112 设 $f(x)$ 在$[0,4]$上一阶可导且 $f'(x)\geqslant\frac{1}{4},f(2)\geqslant0$,则在下列区间上必有 $f(x)\geqslant\frac{1}{4}$ 成立的是(   ).

(A)$[0,1]$ (B)$[1,2]$ 2 (C)$[2,3]$ (D)$[3,4]$

2.113 设 $f(x)$ 二阶可导,$f''(x)<0,f'(0)\leqslant\frac{1}{3},f(0)=0,f(1)=\frac{1}{2}$,并设 $0<x_n<1$,且 $x_{n+1}=f(x_n),n=1,2,\cdots$.

(1) 证明$\frac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$内单调减少;

(2) 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

2.114 设ξ_a为函数$f(x)=\arctan x$在区间$[0,a]$上使用拉格朗日中值定理时的中值,求$\lim\limits_{a\to0^+}\frac{\xi_a}{a}$.

2.115 设函数 $f(x)=\arctan x$,若 $f(x)=f'(\xi)\sin x$,求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\xi^2}{x^2}$.

2.116 设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间(a,b)内可导,...

2 又 $x_{n+1}=f(x_n)=f(x_n)-f(0)=f'(\xi_n)\cdot x_n$,其中$0<\xi_n<x_n,f'(\xi_n)<f'(0)\leqslant\frac{1}{3}$,故$x_{n+1}\leqslant\frac{1}{3}x_n<x_n$,得$\{x_n\}$单调减少.

由单调有界准则,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

2.114 【解析】$\arctan a-\arctan 0=\frac{a}{1+\xi_a^2}$,得$\xi_a^2=\frac{a-\arctan a}{\arctan a}$.故

$$\lim_{a\to0}\frac{\xi_a^2}{a^2}=\lim_{a\to0}\frac{a-\arctan a}{a^2\arctan a}=\lim_{a\to0}\frac{a-\arctan a}{a^3}=\frac{1}{3},$$

于是$\lim\limits_{a\to0^+}\frac{\xi_a}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2.115 【解析】$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$,由 $f(x)=f'(\xi)\sin x$,得 $\arctan x=\frac{\sin x}{1+\xi^2}$,解得

驻点 $x=\frac{3}{4}$,又$f''\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{2}{3}>0$,知 $f(x)$ 在 $x=\frac{3}{4}$ 处取最小值

$$f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{4}\right)^3-\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=-\frac{3}{16}.$$

3.80 (B) 【解析】令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\frac{1}{f(t)}dt$,则 $F(x)$ 在$[a,b]$上连续,而且

$$F(a)=\int_b^a\frac{1}{f(t)}dt<0,F(b)=\int_a^b f(t)dt>0.$$

故 $F(x)$ 在(a,b)内有根. 重点

又 $F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}>0$，所以 $F(x)$ 单调增加，它在 (a,b) 内最多只有一个根. 应选(B).

3.81 (D) 【解析】曲线 $y=f(x)$ 在点(0,1)处切线方程为 $y=1+2x$. 选项(D)中函数记为 $y=F(x)$，由 $F(0)=1$，$F'(0)=2f(0)=2$，知曲线 $y=F(x)$ 在点(0,1)处切线方程也为 $y=1+2x$. 故应选(D).

3.82 【解析】$F'(x)=\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)\int_1^x f(t)dt-\int_1^x\left(\frac{2}{t}+\ln t\right)f(t)dt\right]$

$$=\left(-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\right)\int_1^x f(t)dt+\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)f(x)-\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)f(x)$$

(2) 如图1-3-1所示，若让A，B绕y轴旋转一周所得的旋转体体积相等，求曲线L的方程.

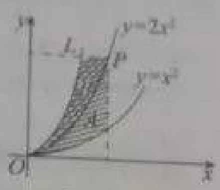


图 1-3-1

≤

3.122 如图1-3-2所示，阴影部分由曲线 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$，直线 $y=a(0<a<1)$，$x=\pi$ 以及 y 轴围成. 此图形绕直线 $y=a$ 旋转一周形成旋转体 S. 问 a 为何值时，S 有最小体积，S 有最大体积.

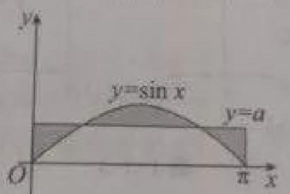


图 1-3-2

都有 $\begin{cases}0<a<1\text{时}, & \text{收敛},\\ a\geqslant 1\text{时}, & \text{发散}.\end{cases}$

3.104 (C) 【解析】$\int_0^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1\frac{\arctan x}{x^{\frac{a+1}{2}}}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln\left(1+\sin\frac{1}{x^a}\right)}{x^b\ln\cos\frac{1}{x}}dx=I_1+I_2.$

对于 I_1，盯着 $x\to0^+$，此时 $\arctan x\sim x$，故 I_1 与 $\int_0^1\frac{1}{x^{\frac{a+1}{2}-1}}dx=\int_0^1\frac{1}{x^{\frac{a-1}{2}}}dx$ 同敛散，于是要求 $\frac{a-1}{2}<1$，即 $a<3$.

对于 I_2，盯着 $x\to+\infty$，此时

$$\ln\left(1+\sin\frac{1}{x^a}\right)\sim\sin\frac{1}{x^a}\sim\frac{1}{x^a},\ln\cos\frac{1}{x}=\ln\left(1+\cos\frac{1}{x}-1\right)\sim\cos\frac{1}{x}-1\sim-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2,$$

−

故 I_2 与 $\int_1^{+\infty}\frac{\frac{1}{x^a}}{x^b\cdot\frac{1}{x^2}}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{b+a-2}}dx$ 同敛散，于是 $b+a-2>1$，即 $a+b>3$.

综上，$a<3$ 且 $a+b>3$，选(C).

$$S=4\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$
$$=4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}\pi.$$

3.124【解析】如图 1-3-7 所示，

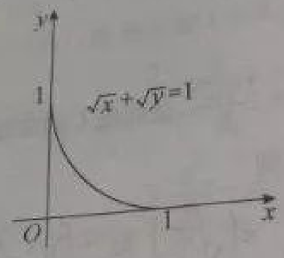


图 1-3-7

故
$$S=\int_0^1(1-\sqrt{x})^2\mathrm{d}x=\int_0^1\left(1-2x^{\frac{1}{2}}+x\right)\mathrm{d}x$$
$$=\left(x-\frac{4}{3}x^{\frac{2}{3}}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{6}.$$
$\frac{3}{2}$

3.125【解析】如图 1-3-8 所示，
$$S=\int_0^{2\pi}y\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}y(t)\cdot x'(t)\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\mathrm{d}t$$

……在[0,1]上单调增加，$F(1)>F(0)=0$. 所以有
$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x-\frac{2}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x>0,\text{即 }\bar{x}>\frac{2}{3}.$$

3.141【解析】如图 1-3-14 所示，$y=\pm\sqrt{x^3-x^4}\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 平面图形关于 x 轴对称，故 $\bar{y}=0$. 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，平面图形的高 $y=2\sqrt{x^3-x^4}$，故
$$\bar{x}=\frac{\int_0^1 x\cdot 2\sqrt{x^3-x^4}\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 2\sqrt{x^3-x^4}\,\mathrm{d}x}=\frac{\int_0^1 x^{\frac{5}{2}}\cdot\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x}.$$

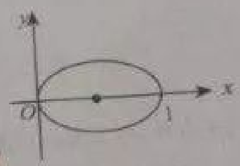
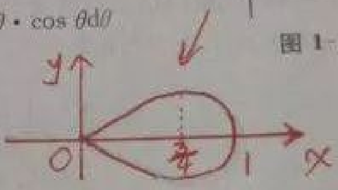


图 1-3-14

其中，
$$\int_0^1 x^{\frac{5}{2}}\cdot\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=\sin^2\theta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\cdot\cos\theta\cdot 2\sin\theta\cdot\cos\theta\mathrm{d}\theta$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta\cdot\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta\mathrm{d}\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8\theta\mathrm{d}\theta\right)$$
$$=2\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{128}.$$



$$\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=\sin^2\theta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cdot\cos\theta\cdot 2\sin\theta\cdot\cos\theta\mathrm{d}\theta$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cdot\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta\mathrm{d}\theta\right)$$

每平方千米 10 万人.

（1）试求距市中心 2 km 区域内的人口数；

（2）若人口密度近似为 $p(r)=1.2e^{-0.2r}$ 单位不变，试求距市中心 2 km 区域内的人口数.

3.144 半径为 1 的球沉入水中，球的上顶与水平面齐平. 球与水的密度相同记为 ρ，重力加速度记为 g. 现将球打捞出水，至少需做多少功？

3.145 一个均质的物体，高 4 m，水平截面面积是高度 h（从底部算起）的函数 $S=20+3h^2$. 已知物体的密度与水的密度同为 10^3 kg/m³，此物体沉在水中，上表面与水面平齐. 问将此物体打捞出水，至少需做功多少（设重力加速度 $g=10$ m/s²）？
顶

3.146 一块 1 000 kg 的冰块要被吊起 30 m 高，而这块冰以 0.02 kg/s 的速度溶化. 假设冰块以 0.1 m/s 的速度被吊起，吊索的线密度为 4 kg/m. 求把这块冰吊到指定高度需作的功（设重力加速度 $g=10$ m/s²）.

3.147（1）宽度为 6 m 的金属板，三分之一作为侧边，做成排水沟（如图 1-3-4）. 问折起角度多大时，排水沟的截面积 S 最大；

图 1-3-4

（2）设一抛物线过（1）中所求得截面的 A, D 及 BC 中点，记该抛物线与直线段 AD 所围成封闭平面的面积 $\widetilde{S}$，求 $\frac{S}{\widetilde{S}}$；

(3) 若排水沟长为 1 m，其横截面原为(1) 中等腰梯形的形状，因淤泥沉积形成了(2) 中抛物线的形状. 现清除淤泥，恢复(1) 中的形状，将淤泥搬运出排水沟，则至少

$$= \rho g\pi \cdot \left(12 - \frac{32}{3}\right) = \frac{4}{3}\rho g\pi.$$

3.145【解析】作垂直截面并建系，如图 1-3-16 所示，将 x 轴建在水面上，由于物体与水的密度相同，打捞时，球在水下的行程不做功，球出水后，阴影部分$[y, y+dy]$做功微元

$$dW = (y+4)\rho g \cdot S(y) \cdot dy,$$

故总功

$$W = \int_{-4}^{0} (y+4)\rho g S(y) dy$$

$$= \int_{-4}^{0} (y+4)(20+3y^2) \times 10^3 \times 10 dy$$

$$= 2.24 \times 10^6 (J).$$

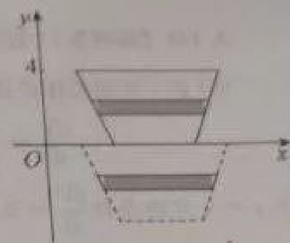
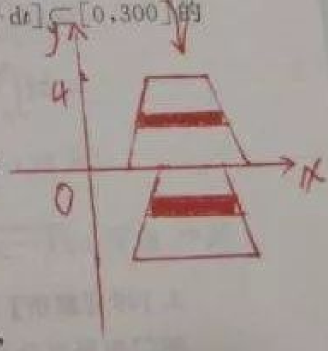


图 1-3-16



3.146【解析】把冰吊到指定高度所需时间 $T = 30/0.1 = 300$. 在时间段$[t, t+dt] \subseteq [0, 300]$的功的微元

$$dW = [(30 - 0.1 \cdot t) \times 4 + (1\,000 - 0.02t)]g \times 0.1dt,$$

$$W = \int_0^{300} [(30 - 0.1 \cdot t) \times 4 + (1\,000 - 0.02t)] \times 10 \times 0.1dt$$

$$= 3.171 \times 10^5 (J).$$

3.147【解析】(1) 设折起角度为 θ，则排水沟的截面积为

$$S(\theta) = 2 \cdot 2\sin\theta + 2 \cdot 2\cos\theta \cdot \sin\theta = 2^2\left(\sin\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right),$$

$$W = 2\int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{3} - y)\left[\frac{y}{\sqrt{3}} + 1 - \sqrt{\frac{4y}{\sqrt{3}}}\right] \cdot 1 \cdot \rho dy = 2 \cdot \rho \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{5}\rho(J).$$

3.148【解析】(1) 如图 1-3-18 所示，$V = 4\int_{-1}^{y} 4\sqrt{1-u^2} du = 16\int_{-1}^{y} \sqrt{1-u^2} du.$

(2) 设 t 时刻液体的体积为 $V = V(t)$，则

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = 16\sqrt{1-y^2}\,\frac{dy}{dt},$$

令 $y = 0$ 并由条件 $\frac{dV}{dt} = 0.16$ 得：$\frac{dy}{dt} = 0.01(m/min).$

(3) $W = \int_{-1}^{1} 16\sqrt{1-y^2}(1-y)dy$

$$= 16\int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}dy - 16\int_{-1}^{1} y\sqrt{1-y^2}dy$$

$$= 32\int_0^1 \sqrt{1-y^2}dy \xlongequal{y = \sin t} 32\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$$

$$= 32 \cdot \frac{\pi}{4} = 8\pi(J),$$

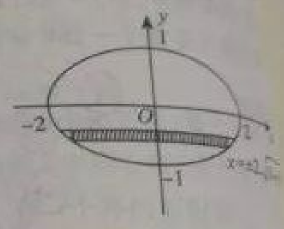


图 1-3-18

其中，由于 $y\sqrt{1-y^2}$ 为奇函数，故 $\int_{-1}^{1} y\sqrt{1-y^2}dy = 0.$

3.151

3.1

令

得

故 $I = \frac{2}{3}$

5.5【分析】首先画积分区域 D 的图形(如图 1-5-4)，本题有三种方法可以用.

一种方法是利用

$$\iint_D y dxdy = \iint_{D+D_1} y dxdy - \iint_{D_1} y dxdy,$$

$D+D_1$ 是正方形区域比较容易积分，D_1 是半圆区域，可利用极坐标积分. 另一种方法是把原积分直接在直角坐标下化为先 x 后 y 的积分进行计算. 第三种方法是借助形心公式计算.

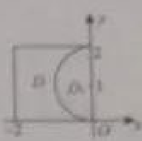


图 1-5-4

【解析】方法一

$$\iint_D y dxdy = \iint y dxdy - \iint y dxdy.$$

$$\iint\limits_{D+D_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-2}^{0}\mathrm{d}x\int_{0}^{2} y\mathrm{d}y = 4.$$

$$\iint\limits_{D_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{2\sin\theta} r^2\sin\theta\mathrm{d}r = \frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta = \frac{8}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{8}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

于是 $\iint\limits_{D} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4 - \frac{\pi}{2}$.

方法二 $\iint\limits_{D} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{0}^{2}\mathrm{d}y\int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}} y\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{2} y\mathrm{d}\theta - \int_{0}^{2} y\sqrt{2y-y^2}\mathrm{d}y$ y

$$= 4 - \int_{0}^{2} y\sqrt{1-(y-1)^2}\mathrm{d}y.$$

令可逆矩阵 $\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$.

218.【解析】已知条件是 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，故应当从相似的必要条件来确定参数.

由 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$ 知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的迹，即 $1+1+0 = 2+1+c$，得 $c = -1$.

又相似矩阵有相同的特征值，而

$$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1).$$

λ

所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值是 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$. 那么

$$|\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \\ -a & -b & 2 \end{vmatrix} = 2(-6-3b) = 0.$$

2

$$|2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -a & -b & 3 \end{vmatrix} = -3(a+2b+6) = 0.$$

解得 $a = -0, b = -2$. 因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个不同的特征值，故 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化，由 $(\lambda_i\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量为

数学三

1.8 求 $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^x \frac{\sin 2t}{\sqrt{4+t^2}\int_0^x(\sqrt{t+1}-1)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$.

1.9 求 $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$.

1.10 求 $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{\cos x\ln(x-3)}{\ln(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^3)}$.

1.11 求 $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(a^{\frac{1}{x}} + a^{-\frac{1}{x}} - 2)$，其中常数 $a > 0$.

1.12 求 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right)$.

1.13 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x^3+2x^2+1} - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})$.

1.14 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-\mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{x}\right)$.

1.15 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\ln\left(\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}\right)}$.

1.16 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\frac{\pi x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

+

1.14【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+x^2-1+e^{-x}}{x(1-e^{-x})}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-1+e^{-x}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+2x-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{}$$

1.15【解析】 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\ln\left(\frac{\ln x-1}{\ln x+1}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(\frac{\ln x-1}{\ln x+1}\right)\ln x}$,

$$\lim_{x\to 0^+}\ln x\ln\left(\frac{\ln x-1}{\ln x+1}\right)=\lim_{x\to 0^+}\ln x\ln\left(1+\right.$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\ln x\cdot\frac{-}{\ln x}$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\ln\left(\frac{\ln x-1}{\ln x+1}\right)}=e^{-2}$.

1.16【解析】 原式 $=\exp\left\{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\tan\frac{\pi x}{1+2x}\right)}{x}\right\}$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}\frac{\sec^2\frac{\pi x}{1+2x}}{\tan\frac{\pi x}{1+2x}}\cdot\frac{\pi}{(1+2x)^2}\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2\pi}{(1+2x)^2}}{\cdot\ \ 2\pi x}\right\}$$

$$\sin\frac{\quad}{1+2x}\Bigg]$$

x→+∞

$$=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}\frac{-\dfrac{8\pi}{(1+2x)^3}}{\cos\dfrac{2\pi x}{1+2x}\cdot\dfrac{2\pi}{(1+2x)^2}}\right\}$$

+

$$=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}\frac{4}{1+2x}\right\}=e^0=1.$$

1.17【解析】 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(\sin x)-\ln x}{1-\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{\sin x}}=$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}-\frac{x\sin x}{3x^2}}=e^{-}$$

1.18【解析】 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x}{\cos 2x}-1\right)}{x^2}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\cos x}{\cos 2x}-1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2\cos 2x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\cos}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin x+2\sin 2x}{2x}}=e^{\frac{3}{2}}.$$

1.19【解析】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)-x\left[1-\right.}{x-\left[x-\frac{x^3}{3!}+o\right.}$

$$=\lim\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{\quad}=2.$$

1.17 求 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

1.18 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

1.19 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x-\sin x}$.

1.20 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{\frac{x^2}{2}})\sin\frac{x^2}{2}}$.

+

1.21 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[5]{x^5+x^4}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$.

1.22 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3+\dfrac{x}{2}-\tan\dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$.

1.23 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x\sin^2 x}$.

1.24 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+x^2\sin\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

1.37 设函

并求常数 A,

1.38 已

1.39 设

1.40

存在，并求

1.41

1.25 求$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{a}{x}-\left(\dfrac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right]$，其中$a\neq 0$。

1.26 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$。

1.27 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)\sin x}$。

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cdots}{\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}=2.$$

1.20【解析】原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\left[1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right]}{\left\{\left[1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]-\left[1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]\right\}\cdot\frac{x^2}{2}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}=-\frac{1}{4}.$$

1.21【解析】原式$\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\sqrt[6]{1+t}-\sqrt[6]{1-t}}{t}$

$t\to 0^+$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\left[1+\frac{1}{6}t+o(t)\right]-\left[1-\frac{1}{6}t+o(t)\right]}{t}=\frac{1}{3}.$$

1.22【解析】原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}-\tan\dfrac{1}{x}\cdot e^{\frac{1}{x}}\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$$

由此可知，极限存在且不为零的充要条件是$99-k+1=0$，即$k=100$。

1.72 (C)【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1>0$，由极限的保号性，有$\exists N>0$，当$n>N$时，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>0$，于是自某项起（$n>N$起），$a_n$同号。

对于其他选项，可举反例。

取$a_n=n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1>0$，但$\{a_n\}$无界，排除(A)；

取$a_n=1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1>0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$，排除(B)；

取$a_n=n-(-1)^n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1>0$，但$\{a_n\}$不单调，排除(D)。

1.73 (A)【解析】因$x_n>0$，所以数列$\{x_n\}$有下界。又$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{2}<1$，由数列极限的保号性可知，存在正整数N，当$n>N$时，$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<1$，即当$n>N$时数列$\{x_n\}$是单调减少的，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$是存在的。结合极限的运算法则，通过反证法易知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。

【注】① $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<1$与$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<1$之间的区别：前者从第N项开始满足$x_{n+1}<x_n$，而后者从指定项（默认第一项）开始满足。但从考查极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$的角度而言，两个条件没有本质上的区别。

② 若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=2$，令$u_n=\dfrac{1}{x_n}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{u_{n+1}}=\dfrac{1}{2}$ 2，从而$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$。利用无穷小与无穷大之间的关系，知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$。

③ 若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$可能存在，也可能不存在。如当$x_n=\dfrac{1}{n}$时存在，当$x_n=n$时不存在。

1.74 (B)【解析】① 对于(B)，若单调数列$\{a_n\}$有界，则极限存在，记$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+a_n^2}=$

$x\to(-1)^+$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{x(x-1)}{x(x-1)(x+1)} = -\infty,$$

故 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，为无穷间断点.

1.94【解析】(1) 因为

$$\lim_{x\to0} A(x) = \lim_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0}\exp\left\{\frac{1}{x}\ln\frac{a^x+b^x}{2}\right\}$$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}\right\}$$

$$= \exp\left\{\frac{\ln a+\ln b}{2}\right\} = \sqrt{ab},$$

所以，当 $c=\sqrt{ab}$ 时，$A(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(2) 易知 $A(1)=\dfrac{a+b}{2}$，$A(-1)=\dfrac{2ab}{a+b}$，$\lim\limits_{x\to0}A(x)=\sqrt{ab}$，而

$$\lim_{x\to+\infty} A(x) = \lim_{x\to+\infty} 2^{-\frac{1}{x}}\max\{a,b\}\left[1+\left(\frac{\min\{a,b\}}{\max\{a,b\}}\right)^x\right]^{\frac{1}{x}}$$

是函数 $F(x)$ 的间断点. 特别对点 $x_0=-\dfrac{\pi}{2}$，令 $t=x+\dfrac{\pi}{2}$，有

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} F(x) = \lim_{t\to0}\frac{t(2t-\pi)}{2\sin t} = -\frac{\pi}{2},$$

故点 $x=-\dfrac{\pi}{2}$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点；而点列 $x_k=-k\pi-\dfrac{\pi}{2}(k=1,2,\cdots)$ 显然是函数 $F(x)$ 的无穷间断点.

1.101【解析】因
$$f(x)=\begin{cases}0, & x>0,\\ \dfrac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{1}{1+x}}{x^2}, & x<0\text{，且}x\neq-1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{1}{1+x}}{x^2} = \frac{\pi}{4}\cdot\lim_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \xlongequal{-\frac{1}{x}=t} \frac{\pi}{4}\cdot\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2}{e^t} = 0 = \lim_{x\to0^+} f(x),$$

故 $x=0$ 为可去间断点.

又
$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{1}{1+x}}{x^2} = \frac{\pi}{2e},\quad \lim_{x\to(-1)^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{1}{1+x}}{x^2} = -\frac{\pi}{2e},$$

故 $x=-1$ 为跳跃间断点.

1.102【解析】$f(x)$ 在区间 $(-1,0)$，$(0,1)$ 及 $(1,+\infty)$ 内都是初等函数，且是连续的. $f(x)$ 在 $x=0$ 处无定义，故 $x=0$ 是间断点. 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x-1}}=e^{-1}$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\ln(1+x)=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，所以 $x=0$ 为跳跃间断点.

1.107【解析】考虑函数无定义的点，间断点有 $x=-2,-1,0,1$.

在点 $x_1=-2$ 处，由 $\lim \dfrac{x^3+1}{\cdots} = -\dfrac{7}{6}$，可知 $f(x)$ 在点 $x_1=-2$ 的半径小于1的去

心邻域内有界；同时，任一半径小于 1 的去心邻域内 $f(x)$ 的函数值无限振荡，振幅不趋于 0，所以 $x_1=-2$ 是 $f(x)$ 的振荡间断点.

在点 $x_2=-1$ 处，由于 $\frac{x^2+1}{|x+1|(x^2-x)}=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{|x+1|(x^2-x)}\to\pm\frac{3}{2}$，在点 $x_2=-1$ 的半径小于 1 的去心邻域内有界；而 $\lim_{x\to-1}\sin\left(\frac{|x-1|}{x+2}\pi\right)=0$，所以 $\lim_{x\to-1}f(x)=0$，从而可知 $x_2=-1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

2.3 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，在区间 $[0,2]$ 上，$f(x)$ ...

满足 $f(x)=kf(x+2)$，其中 k 为常数.

(1) 写出 $f(x)$ 在 $[-2,0)$ 上的表达式；

(2) 问 k 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导？

2.4 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且 $f'(0)=a(a\neq0)$，又对任意的 $x,y\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$，求 $f(x)$.

$\left(-\frac{\pi}{2a},\frac{\pi}{2a}\right)$ $(a>0)$

2.5 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且对任意的 $x,x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$，$f(x)=1+xg(x)$，...

2.4【解析】由 $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$，令 $y=0$，得 $f(0)=0$，故

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\frac{f(\Delta x)+f(x)}{1-f(\Delta x)f(x)}-f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)[1+f^2(x)]}{\Delta x[1-f(x)f(\Delta x)]}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to0}\frac{1+f^2(x)}{1-f(x)f(\Delta x)}\\&=f'(0)[1+f^2(x)],\end{aligned}$$

所以 $\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}=a$，即

$$\frac{\mathrm{d}[\arctan f(x)+C_1]}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}(ax+C_2)}{\mathrm{d}x},$$

故有 $\arctan f(x)+C_1=ax+C_2$，即 $\arctan f(x)=ax+C$.

由 $f(0)=0$，得 $C=0$，所以有 $f(x)=\tan ax(a\neq0)$. $>$

2.5【解析】对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x)\cdot f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}\cdot f(x)\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{1+\Delta x\cdot g(\Delta x)-1}{\Delta x}\cdot f(x)\\&=\lim_{\Delta x\to0}g(\Delta x)\cdot f(x)=f(x).\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处可导（事实上可以证明 $f(x)=e^x$）.

2.6【解析】分别用 $x+\Delta x,x$ 代替 x_1,x_2，则由题干条件，有

$$\left|\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right|\leqslant|\Delta x|,$$

两边对 $\Delta x\to0$ 取极限得，$f'(x)=0,x\in(-\infty,+\infty)$. 故 $f(x)$ 是常值函数.

2.7【解析】由 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=0$ 可得 $f(1)=0,f'(1)=0$. 故

$$\varphi(x)=\int_0^{x-1}\frac{1}{x-1}f'(1+u)\mathrm{d}u=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{f(x)}{x-1},x\neq1.$$

易知 $\varphi(1)=0,\varphi'(x)=\frac{f'(x)}{x-1}-\frac{f(x)}{(x-1)^2}(x\neq1).$

曲线 $y=f(x)$ 有铅直渐近线 $x=0$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}=0,$$

曲线 $y=f(x)$ 无斜渐近线.

2.68【解析】① 定义域. $\begin{cases}4x^2+x\geqslant 0,\\ 2+\dfrac{1}{x}>0\end{cases}\Rightarrow x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup(0,+\infty).$

② 铅直渐近线. $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)=-\infty\Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ 为铅直渐近线;

+

$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{4x^2+x}\ln(2x-1)-\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{4x^2+x}\ln x=0\Rightarrow x=0$ 不是铅直渐近线.

③ 水平渐近线. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$,无水平渐近线.

④ 斜渐近线. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)=2\ln 2=a\neq 0$,

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-2\ln 2\cdot x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4+\frac{1}{x}}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-2\ln 2\right]\cdot x$$

$$\xlongequal{x=\frac{1}{t}}\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{4+t}\ln(2+t)-2\ln 2}{t}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{t\to 0^+}\left[\frac{1}{2\sqrt{4+t}}\ln(2+t)+\frac{\sqrt{4+t}}{2+t}\right]=\frac{1}{4}\ln 2+1,$$

2.79 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导,且 $f(a)=f(b)=g(a)=0$,证明:存在 $\xi\in(a,b)$,使 $f''(\xi)g(\xi)+2f'(\xi)g'(\xi)+f(\xi)g''(\xi)=0$.

2.80 设 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数,且 $f(-1)=0,f(1)=1,f'(0)=0$. 证明:在 $[-1,1]$ 内存在 ξ,使得 $f'''(\xi)=3$.

2.81 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导,$g''(x)\neq 0,f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$. 证明:

(1) 在 (a,b) 内,$g(x)\neq 0$;

(2) 在 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

2.82 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $f'(x)\neq 0$. 证明:存在 $\xi,\eta\in(a,b)$,使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}.$$

2.83 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导,$f(0)=0,|f'(x)|\leqslant|f(x)|$,则 $f(1)=$ ______.

2.84 设 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上一阶可导且 $f'(x)\geqslant\dfrac{1}{4}$,$f(2)\geqslant 0$,则在下列区间上必有 $f(x)\geqslant\dfrac{1}{4}$ 成立的是( ).

(A) $[0,1]$ (B) $[1,2]$ (C) $[2,3]$ (D) $[3,4]$

2

2.85 设 $f(x)$ 二阶可导,$f''(x)<0,f'(0)\leqslant\dfrac{1}{3}$,$f(0)=0,f(1)=\dfrac{1}{2}$,并设 $0<x_n<1$,且 $x_{n+1}=f(x_n),n=1,2,\cdots$.

(1) 证明 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少;

(2) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

2.86 设 ξ_a 为函数 $f(x)=\arctan x$ 在区间 $[0,a]$ 上使用拉格朗日中值定理时的中值,求 $\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{\xi_a}{a}$.

2.87 设函数 $f(x)=\arctan x$,若 $f(x)=f'(\xi)\sin x$,求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\xi^2}{x^2}$.

②又 $x_{n+1}=f(x_n)=f(x_n)-f(0)=f'(\xi_n)\cdot x_n$，其中 $0<\xi_n<x_n$，$f'(\xi_n)<f'(0)\leqslant\frac{1}{3}$，故 $x_{n+1}\leqslant\frac{1}{3}x_n<x_n$，得 $\{x_n\}$ 单调减少.

由单调有界准则，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

2.86 【解析】 $\arctan a-\arctan 0=\frac{a}{1+\xi_a^2}$，得 $\xi_a^2=\frac{a-\arctan a}{\arctan a}$. 故

$$\lim_{a\to0}\frac{\xi_a^2}{a^2}=\lim_{a\to0}\frac{a-\arctan a}{a^2\arctan a}=\lim_{a\to0}\frac{a-\arctan a}{a^3}=\frac{1}{3},$$

于是 $\lim\limits_{a\to0^+}\frac{\xi_a}{a}=\frac{1}{\sqrt3}$.

2.87 【解析】 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$，由 $f(x)=f'(\xi)\sin x$，得 $\arctan x=\frac{\sin x}{1+\xi^2}$，解得

$$\xi^2=\frac{\sin x}{\arctan x}-1=\frac{\sin x-\arctan x}{\arctan x}.$$

因此

$$\lim_{x\to0}\frac{\xi^2}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\arctan x}{x^2\arctan x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\arctan x}{x^3}.$$

由 $\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$，$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)$.

张宇考研数学题源探析经典1000题（数学三）

$$F(a)=\int_b^a\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t<0,\ F(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t>0,$$

故 $F(x)$ 在 (a,b) 内有根.

重点

又 $F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}>0$，所以 $F(x)$ 单调增加，它在 (a,b) 内最多只有一个根. 应选(B).

3.78 (D) **【解析】** 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处切线方程为 $y=1+2x$. 选项(D)中函数记为 $y=F(x)$. 由 $F(0)=1$，$F'(0)=2f(0)=2$，知曲线 $y=F(x)$ 在点 $(0,1)$ 处切线方程也为 $y=1+2x$. 故应选(D).

3.79 【解析】

$$\begin{aligned}F'(x)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)\int_1^x f(t)\mathrm{d}t-\int_1^x\left(\frac{2}{t}+\ln t\right)f(t)\mathrm{d}t\right]\\&=\left(-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\right)\int_1^x f(t)\mathrm{d}t+\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)f(x)-\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)f(x)\\&=\left(-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\right)\int_1^x f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

又在 $x>1$ 时，$f(x)>0$，故 $\int_1^x f(t)\mathrm{d}t>0$.

令 $F'(x)=0$，有 $-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}=0$，$x=2$ 为唯一驻点……

也有

$$\begin{cases}0<a<1\text{ 时，} & \text{收敛，}\\ a\geqslant1\text{ 时，} & \text{发散.}\end{cases}$$

3.99 (C) **【解析】** $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\arctan x}{x^{\frac{a+1}{2}}}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\ln\left(1+\sin\frac{1}{x^a}\right)}{x^b\ln\cos\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=I_1+I_2.$

对于 I_1，盯着 $x\to0^+$，此时 $\arctan x\sim x$，故 I_1 与 $\int_0^1\frac{1}{x^{\frac{a+1}{2}-1}}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{x^{\frac{a-1}{2}}}\mathrm{d}x$ 同敛散，于是要求 $\frac{a-1}{2}<1$，即 $a<3$.

对于 I_2，盯着 $x\to+\infty$，此时

$$\ln\left(1+\sin\frac{1}{x^a}\right)\sim\sin\frac{1}{x^a}\sim\frac{1}{x^a},\ln\cos\frac{1}{x}=\ln\left(1+\cos\frac{1}{x}-1\right)\sim\cos\frac{1}{x}-1\sim\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2,$$

故 I_2 与 $\int_1^{+\infty}\frac{\frac{1}{x^a}}{x^b\cdot\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{b+a-2}}\mathrm{d}x$ 同敛散，于是 $b+a-2>1$，即 $a+b>3$.

综上，$a<3$ 且 $a+b>3$，选(C).

3.100【解析】事实上，因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$，故当 $x\to0^+$ 时，$1-\frac{\sin x}{x}\sim$

3.116 如图 1-3-2 所示，阴影部分由曲线 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$，直线 $y=a(0<a<1)$，$x=\pi$ 以及 y 轴围成. 此图形绕直线 $y=a$ 旋转一周形成旋转体 S. 问 a 为何值时，S 有最小体积，S 有最大体积.

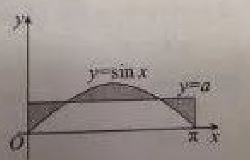


图 1-3-2

3.117 某企业投资 12 百万元建成一条生产线，投产后为使收益率保持为 24 百万元 / 年，必须在时间 t 追加投入 $\varphi(t)=8+2t^{\frac{2}{3}}$（百万元 / 年），试确定该生产线在何时停产，可使企业获得最大利润？并求最大利润.

$$=\int_{-1}^{1}(x^2+x^3)\mathrm{d}x=2\int_0^1x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

图 1-5-3

故 $I=\frac{2}{3}$.

5.5【分析】首先画积分区域 D 的图形（如图 1-5-4），本题有三种方法可以用. 一种方法是利用

$$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D+D_1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$D+D_1$ 是正方形区域比较容易积分；D_1 是半圆区域，可利用极坐标积分. 另一种方法是把原积分直接在直角坐标下化为先 x 后 y 的积分进行计算. 第三种方法是借助于形心公式计算.

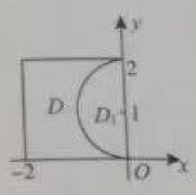


图 1-5-4

【解析】方法一
$$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D+D_1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

而

$$\iint\limits_{D+D_1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-2}^{0}\mathrm{d}x\int_0^2y\mathrm{d}y=4,$$

$$\iint\limits_{D_1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r^2\sin\theta\mathrm{d}r=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{8}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2},$$

于是 $\iint\limits_D y\,dx\,dy = 4-\frac{\pi}{2}$.

方法二 $\iint\limits_D y\,dx\,dy = \int_0^2 dy\int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}} y\,dx = 2\int_0^2 y\,dx - \int_0^2 y\sqrt{2y-y^2}\,dy$ y

$$= 4-\int_0^2 y\sqrt{1-(y-1)^2}\,dy.$$

令 $y-1=\sin t$，则 $\int_0^2 y\sqrt{1-(y-1)^2}\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)\cos^2 t\,dt = \frac{\pi}{2}$.

于是 $\iint y\,dx\,dy = 4-\frac{\pi}{2}$.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛

7.17 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$，又设 $a_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{1+f^n(x)}\,dx$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$（　　）.

(A) 发散　　(B) 条件收敛

(C) 绝对收敛　　(D) 敛散性与具体的 $f(x)$ 有关

7.18 设 $a>0$ 为常数，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{a}{n}\right)$（　　）.

(A) 绝对收敛　　(B) 条件收敛　　(C) 发散　　(D) 敛散性与 a 有关

7.19 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$（　　）.

(A) 不收敛　　(B) 发散　　(C) 条件收敛　　(D) 绝对收敛

7.20 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$ 的敛散性.

7.21 判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]$ 的敛散性.

7.22 判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 的敛散性.

7.23 证明：级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 条件收敛.

三、综合

但级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$ 发散. 因为收敛级数与发散级数的代数和是发散级数，故原级数发散.

7.23【解析】 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}=\frac{1}{\sqrt3}-\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt5}-\frac{1}{\sqrt4}+\cdots$ 是交错级数，但不满足莱布尼茨条

件. 因为 $|u_n|=\frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，所以由比较审敛法知，$\sum_{n=2}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 发

又因为 $S_{2n}=\sum_{k=2}^{2n\,(+1)}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+(-1)^k}}=\left(\frac{1}{\sqrt3}-\frac{1}{\sqrt2}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt5}-\frac{1}{\sqrt4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$.

由于上式每个括号都小于0，所以 $\{S_{2n}\}$ 单调递减，再由

$$S_{2n}>\left(\frac{1}{\sqrt4}-\frac{1}{\sqrt2}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt6}-\frac{1}{\sqrt4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2n+2}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2n+2}}-\frac{1}{\sqrt2}>-\frac{1}{\sqrt2},$$

知$\{S_{2n}\}$单调递减有下界，故$\{S_{2n}\}$收敛，记$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S$，易知$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，则

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}(S_{2n}+u_{2n+1})=S+0=S.$$

所以，原级数的部分和数列$\{S_{2n}\}$收敛，从而级数收敛，所以原级数条件收敛.

2

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}\right]$就可以说明(C)不对，故选(D).

7.26【解析】(1) $f\left(\dfrac{1}{n}\right)-f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)=f'(\xi_n)\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=f'(\xi_n)\dfrac{1}{n(n+1)}$，故

$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right|\leqslant\frac{M}{n^2},$$

其中$|f'(x)|\leqslant M$，M是正常数，所以$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\right]$绝对收敛.

(2)

$$S_n=\sum_{i=2}^{n}\left[f\left(\frac{1}{i}\right)-f\left(\frac{1}{i+1}\right)\right]=f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

-1

由于级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\right]$绝对收敛，所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$存在，从而$\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$存在，即

-1

S_{n-1}

$\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$存在.

7.27 (A) **【解析】**$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}\cdot\dfrac{n^n}{a^n\cdot n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{a}{\mathrm{e}}.$

$$x^2S(x)=-\frac{x}{3}+\ln 3-\ln(3-x),$$

$$S(x)=-\frac{1}{3x}+\frac{\ln 3-\ln(3-x)}{x^2}\ (x\neq 0).$$

由$S(x)=\dfrac{1}{18}+\dfrac{x}{27}+\cdots$可知$S(0)=\dfrac{1}{18}$.

81

故所求级数的和函数为

$$S(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{3x}+\dfrac{\ln 3-\ln(3-x)}{x^2}, & x\in[-3,0)\cup(0,3),\\ \dfrac{1}{18}, & x=0.\end{cases}$$

7.51【解析】由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n(n+1)}{2^n}$的形式，考查幂级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(n+1)x^{n-1}.$$

容易求得它的收敛半径为$R=1$，记

令可逆矩阵$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

209.【解析】已知条件是$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，故应当从相似的必要条件来确定参数.

由$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$知$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$有相同的迹，故$1+1+0=2+1+c$，得$c=-1$.

又相似矩阵有相同的特征值，而

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&1\\0&\lambda-1&0\\ \cdots\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1).$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

λ

所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值是 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-1$. 那么

$$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \\ -a & -b & 2 \end{vmatrix}=2(-6-3b)=0,$$

$$|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -a & -b & 3 \end{vmatrix}=-3(a+2b+6)=0.$$

2

解得 $a=-1,b=-2$. 因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个不同的特征值，故 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化，由 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量为

$$\lambda_1=1,\boldsymbol{x}_1=[1,2,0]^{\mathrm{T}};\lambda_2=2,\boldsymbol{x}_2=[1,0,-1]^{\mathrm{T}};\lambda_3=-1,\boldsymbol{x}_3=[1,0,2]^{\mathrm{T}}.$$

因此

211

B.

由

当

当

故有

即

(2) 用公式有 $EZ=\int_{-\infty}^{+\infty}zf_Z(z)\mathrm{d}z=\int_0^1 z\cdot z\mathrm{d}z+\int_1^2 z(2-z)\mathrm{d}z=1$.

【注】 如果发现概率密度关于 $z=1$ 对称，期望可以迅速得到.

80.【解析】方法一 $P\{X_1=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\}=P\{X_1\leqslant\min\{X_2,X_3,\cdots,X_n\}\}$，记 $Y=\min\{X_2,X_3,\cdots,X_n\}$，则有

1−

$$F_Y(y)=[1-F_{X_2}(y)][1-F_{X_3}(y)]\cdots[1-F_{X_n}(y)]$$
$$=\begin{cases} e^{-(\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_n)y}, & y\geqslant 0, \\ 0, & y<0. \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} (\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_n)e^{-(\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_n)y}, & y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

又因为 (X_1,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=f_1(x)f_Y(y)$，所以

$$P\{X_1\leqslant\min\{X_2,X_3,\cdots,X_n\}\}=\iint\limits_{x\leqslant y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{+\infty}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}(\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_n)e^{-(\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_n)y}\mathrm{d}y$$

取对数得 $$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-2n\ln\theta-\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{2\theta^2},$$

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=-2n\cdot\frac{1}{\theta}+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\theta^{-3}=0$，解得 $\hat{\theta}=\sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$，相互独立，故 $\hat{\theta}$ 为 θ 的最大似然估计量.

179.【解析】 由切比雪夫不等式可知，对任意的 $\varepsilon>0$ 有

$$P\{|\hat{\theta}_n-\theta-k_n|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{D\hat{\theta}_n}{\varepsilon^2},$$

于是 $$0\leqslant\lim_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}_n-\theta-k_n|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_n^2}{\varepsilon^2}=0.$$

又 $$\lim_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}_n-\theta-k_n|\geqslant\varepsilon\}=\lim_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}_n-\theta|\geqslant\varepsilon\}=0,$$

即 $\hat{\theta}_n$ 依概率收敛于 θ，故 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的相合估计量.

180.【解析】 因 $E\hat{\mu}_1=\frac{1}{5}EX_1+\frac{3}{10}EX_2+\frac{1}{2}EX_3=\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{10}+\frac{1}{2}\right)\mu=\mu$,

194.

向量，$\boldsymbol{\beta}=$

80. 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且 X_i 服从参数

$$f_i(x)=\begin{cases}\lambda_i e^{-\lambda_i x}, & x>0, \\ & \text{其他}\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n.$$

求 $P\{X_1 = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}\}$.

81. 设 $X_1 \sim P(\lambda_1)$, $X_2 \sim P(\lambda_2)$, 且 X_1 与 X_2 相互独立.

(1) 证明 $X_1 + X_2$ 的分布为 $P(\lambda_1 + \lambda_2)$;

(2) 求在 $X_1 + X_2 = n (n \geqslant 1)$ 的条件下, X_1 的条件分布.

82. 设二维正态随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, 已知条件概率密度 $f_{X|Y}(x \mid y) = Ae^{-\frac{8}{3}(x-\frac{y}{2})^2}$ 和 $f_{Y|X}(y \mid x) = Be^{-\frac{2}{3}(y-\frac{x}{8})^2}$.

求:(1) 常数 A 和 B;

(2) 边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$;

(3) $f(x, y)$.

83. 设随机变量 X, Y 相互独立, 且 $P\{X = 0\} = P\{X = 1\} = \frac{1}{2}$, $P\{Y \leqslant x\} = x, 0 < x \leqslant 1$, 求 $Z = XY$ 的分布函数.

征

四、数字特证

84. 现有 10 张奖券, 其中 8 张为 2 元的, 2 张为 5 元的. 今从中任取 3 张, 则奖金的数学期望为(　　).

(A)6　　(B)7.8　　(C)9　　(D)11.2

85. 设 X_1, X_2, X_3 相互独立, 且均服从参数为 λ 的泊松分布, 令 $Y = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$, 则 Y^2 的数学期望为(　　).